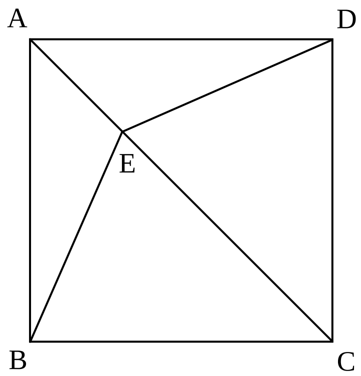
数学　類題にチャレンジ　〔合同の証明　問題編〕

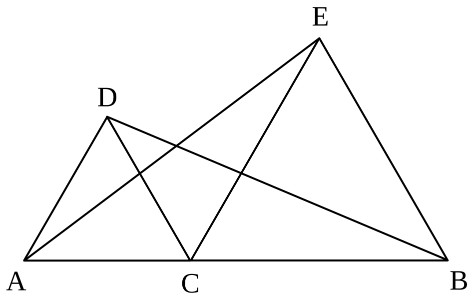
【類題 1】

正方形 ABCD において, 対角線 AC 上に点 E をとり, 線分 EB, ED をかきます。△ABE と△ADE が合同であることを証明しなさい。



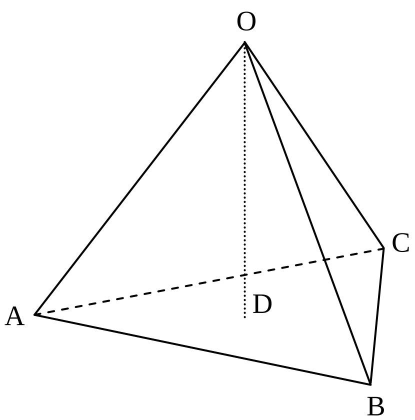
【類題 2】

線分 AB 上に点 C をとり，線分 AC，BC をそれぞれ一辺とする正三角形 ACD，BCE をつくり，さらに線分 AE，BD をかきます。△ACE と△DCB が合同であることを証明しなさい。



【類題 3】

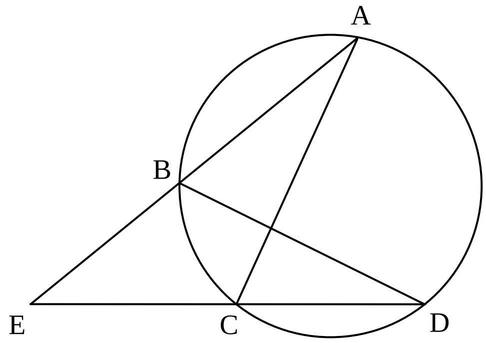
OA＝OB である三角錐 O−ABC において，点 O から面 ABC に垂線 OD を下ろします。△OAD と△OBD が合同であることを証明しなさい。



数学　類題にチャレンジ　〔相似の証明　問題編〕

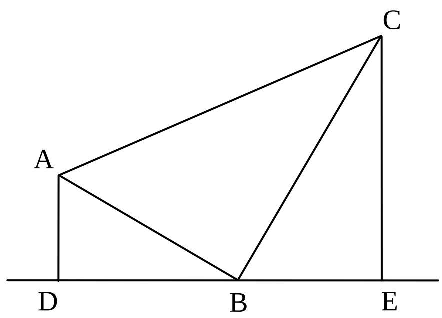
【類題 4】

円周上に 4 点 A，B，C，D をこの順にとり，二直線 AB，CD の交点を E とします。△AEC と△DEB が相似であることを証明しなさい。



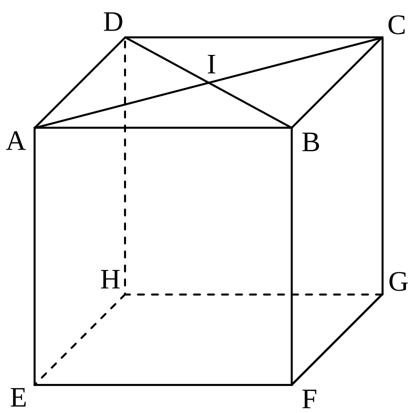
【類題 5】

∠B＝90° である△ABC において，点 B を通る直線に点 A, C からそれぞれ垂線 AD, CE を下ろします。△ADB と△BEC が相似であることを証明しなさい。



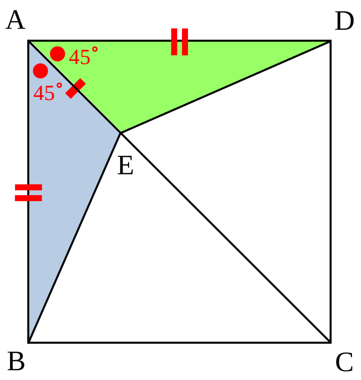
【類題 6】

1 辺 4cm の立方体 ABCD−EFGH において，正方形 ABCD の対角線の交点を I とします。△AIE と△EAG が相似であることを証明しなさい。



【類題 1】

〔考え方〕



①仮定
正方形の 4 辺はすべて等しい（定義）ので，AB＝AD です。

②共通
辺 AE が共通です。

③図形の性質
AB＝BC，∠ABC＝90° だから，△ABC は直角二等辺三角形です。直角二等辺三角形の底角だから，∠BAE＝45° です。
同様に△ADC も直角二等辺三角形だから，∠DAE＝45° です。
したがって，∠BAE＝∠DAE＝45° といえます。

①，②，③より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいため，△ABE≡△ADE です。

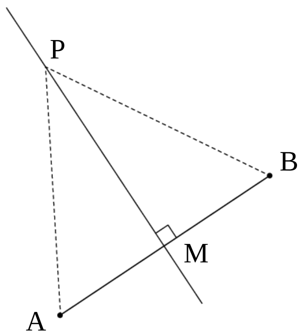
〔解答例〕

△ABE と△ADE において，
仮定より，
　AB＝AD　…①
共通だから，
　AE＝AE　…②
直角二等辺三角形の底角だから，
　∠BAE＝∠DAE＝45°　…③
①，②，③より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので，
　△ABE≡△ADE

【発展 1】

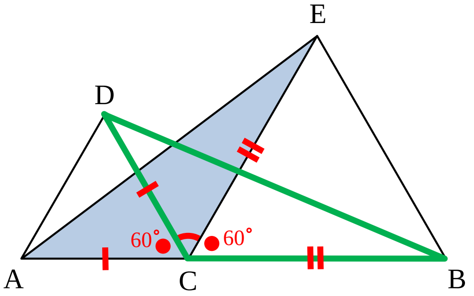
正方形 ABCD において，対角線 AC は対角線 BD の垂直二等分線です。この類題では，「垂直二等分線上にある点は，線分の両端から等距離にある」という性質から，EB＝ED であることが分かります。

この性質は，右の図を用いて証明することができます。線分 AB の中点を M，線分 AB の垂直二等分線上の点を P とするとき，PA＝PB となることを証明してみましょう。



【類題 2】

〔考え方〕



①仮定
正三角形の 3 辺はすべて等しい（定義）ので，
AC＝DC，CE＝CB です。

②図形の性質
正三角形の内角はすべて 60° だから，∠ACD＝60°
です。よって，∠ACE＝∠DCE＋60° と表せます。
同様に，∠ECB＝60° だから，∠DCB＝∠DCE＋60°
と表せます。
同じ式で表すことができたので，∠ACE＝∠DCB と
いえます。

①，②より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいため，
△ABE≡△ADE です。

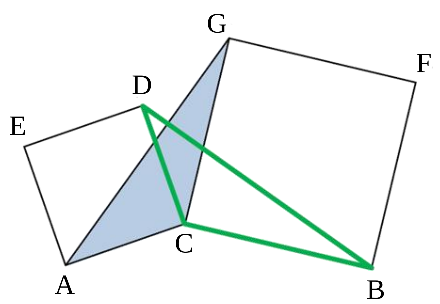
〔解答例〕

△ACE と△DCB において，
仮定より，
AC＝DC　…①
CE＝CB　…②
正三角形の内角はすべて 60° だから，
∠ACE＝∠DCE＋60°
∠DCB＝∠DCE＋60°
したがって，∠ACE＝∠DCB　…③
①，②，③より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので，
△ACE≡△DCB

【発展 2】

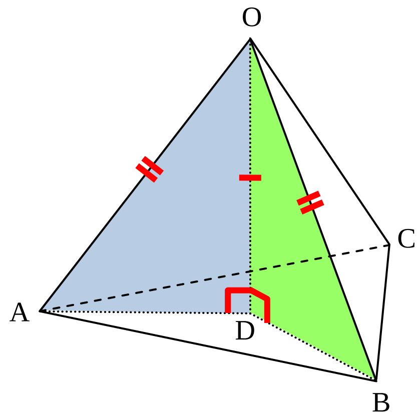
三点 A，B，C が一直線上にない場合や，正三角形を正方形に変えた場合でも，同様に合同が証明できます。

右の図で，四角形 ACDE, CBFG がともに正方形であるとき，△ACG と△DCB が合同であることを証明してみましょう。



【類題 3】

〔考え方〕



①仮定
文中にあるように，OA＝OB です。

②仮定
OD⊥面 ABC だから，∠ODA＝∠ODB＝90° です。

③共通
辺 OD が共通です。

①，②，③より，直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいため，△OAD≡△OBD です。

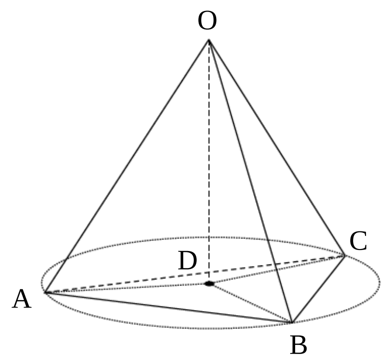
〔解答例〕

△OAD と△OBD において，
仮定より，
　OA＝OB　…①
　∠ODA＝∠ODB＝90°　…②
共通だから，
　OD＝OD　…③
①，②，③より，直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいので，
　△OAD≡△OBD

【発展 3】

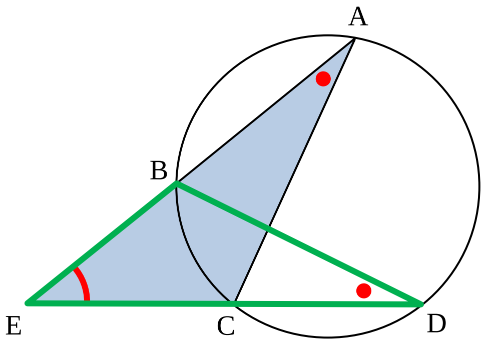
三角錐 O-ABC において，OA＝OB＝OC であるときを考えます。問いの証明のように△OAD≡△OBD≡△OCD が成り立つため，DA＝DB＝DC であることがいえます。したがって，点 D は△ABC の 3 つの頂点を通る円，すなわち外接円の中心（外心）となります。

OA＝OB＝OC＝5cm, DA＝3cm, ∠ADB＝120° とします。三角錐 O−ABC の体積を最大にするには，点 C をどのようにとればよいでしょうか。また，そのときの三角錐 O−ABC の体積を求めてみましょう。



【類題 4】

〔考え方〕



①共通
∠AEC と∠DEB が共通です。

②図形の性質
等しい弧に対する円周角は等しいです。
弧 BC に対する円周角だから，∠EAC＝∠EDB です。

①，②より，2 組の角がそれぞれ等しいため，
△AEC∽△DEB です。

〔解答例〕

△AEC と△DEB において，
共通だから，
　∠AEC＝∠DEB　…①
弧 BC に対する円周角だから，
　∠EAC＝∠EDB　…②
①，②より，2 組の角がそれぞれ等しいので，
　△AEC∽△DEB

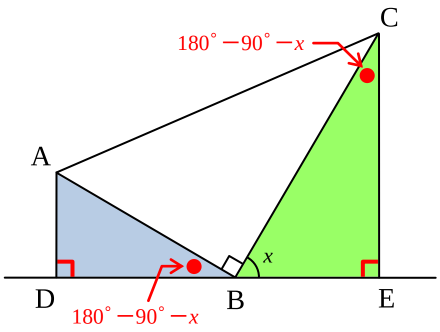
【発展 4】

△AEC∽△DEB より，EA : ED＝EC : EB です。さらに，比の等式では内項の積と外項の積が等しいことを利用すると， EA×EB＝EC×ED という式が成り立つことがわかります。この式は「方べきの定理」という定理の一部で，高校 1 年生で詳しく学習します。

証明の図で，AB＝5cm，BE＝4cm，CD＝4cm のとき，CE の長さを求めて見ましょう。

【類題 5】

〔考え方〕



①仮定
垂線を引いているので，∠ADB＝∠BEC＝90° です。

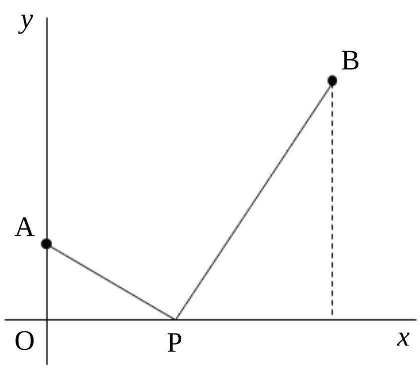
②図形の性質
∠CBE＝x とおきます。
点 B に集まる角の和は 180° だから，
∠ABD＝180° －90° －x と表せます。
三角形の内角の和は 180° だから，△BEC において
∠BCE＝180° －90° －x と表せます。
同じ式で表すことができたので，∠ABD＝∠BCE です。
（証明の中では，x は使わずに「∠CBE」と書きます）

①，②より，2 組の角がそれぞれ等しいため，△ADB∽△BEC です。

〔解答例〕

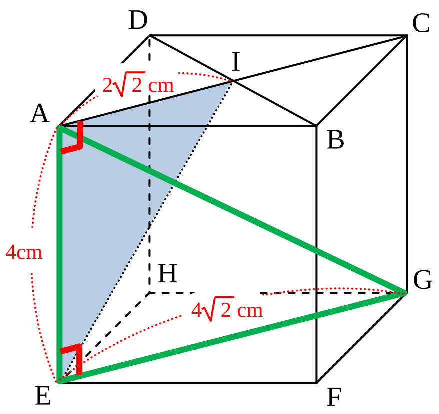
△ADB と△BEC において，
仮定より，
　∠ADB＝∠BEC　…①
点 B に集まる角の和より，
　∠ABD＝180°－90°－∠CBE
△BEC の内角の和より，
　∠BCE＝180°－90°－∠CBE
よって，∠ABD＝∠BCE　…②
①，②より，2 組の角がそれぞれ等しいので，
　△ADB∽△BEC

【発展 5】
　この問いの相似は，図形だけでなく関数の問題でも利用することがあります。
　右の図で，2 点 A，B の座標をそれぞれ（0，2），（7，6）とします。x 軸上に点 P をとり，∠APB＝90° となるようにします。このとき，相似を利用して点 P の x 座標を求めてみましょう。



【類題　6】

〔考え方〕



①仮定
辺 AE⊥面 ABCD，辺 AE⊥面 EFGH だから，
∠IAE＝∠AEG＝90°　です。

②図形の性質
直角二等辺三角形の 3 辺の比は 1：1：$\sqrt{2}$ だから，正方形の対角線は 1 辺の$\sqrt{2}$倍の長さになります。正方形の 1 辺は 4cm とあるので，AC＝EG＝$4\sqrt{2}$ cm とわかります。
また，点 I は対角線 AC の中点だから，AI＝$2\sqrt{2}$ cm です。
ここで，2 組の辺の比を考えます。
　IA：AE＝$2\sqrt{2}$：4＝1：$\sqrt{2}$，　AE：EG＝4：$4\sqrt{2}$＝1：$\sqrt{2}$
したがって，IA：AE＝AE：EG です。

①，②より，2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいため，
△AIE∽△EAG です。

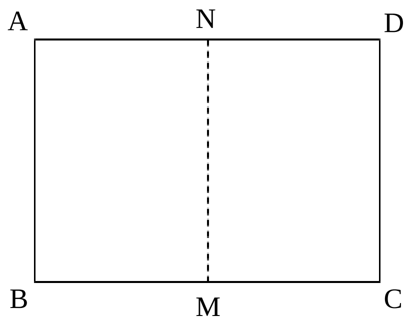
〔解答例〕

△AIE と△BEC において，
仮定より，
　∠IAE＝∠AEG＝90°　　…①
AE＝4cm，EG＝$4\sqrt{2}$ cm，AI＝$2\sqrt{2}$ cm だから，
　IA：AE＝$2\sqrt{2}$：4＝1：$\sqrt{2}$
　AE：EG＝4：$4\sqrt{2}$＝1：$\sqrt{2}$
よって，IA：AE＝AE：EG　　…②
①，②より，2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので，
　△AIE∽△BEC

【発展　6】

長方形 ABCD において，辺 BC, DA の中点をそれぞれ M, N とします。長方形 ABCD と長方形 NABM が相似になるとき，辺 AB と辺 AD の長さの比は 1：$\sqrt{2}$ になります。このことを説明してみましょう。

この 1：$\sqrt{2}$ という比は，白銀比と呼ばれています。A4 や B5 といった規格の紙はすべて，短辺と長辺の比が白銀比となるようにつくられています。



〔発 展　解 答 編〕

【発 展 1】

△PAM と△PBM において，

仮定より，

AM＝BM　…①

∠PMA＝∠PMB＝90°　…②

共通だから，

PM＝PM　…③

①，②，③より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので

△PAM≡△PBM

したがって，PA＝PB

【発 展 2】

△ACG と△DCB において，

仮定より，

AC＝DC　…①

CG＝CB　…②

正方形の 1 つの内角は 90° なので，

∠ACG＝90° ＋∠DCG

∠DCB＝90° ＋∠DCG

よって，∠ACG＝∠DCB　…③

①，②，③より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので，

△ACG≡△DCB

【発 展 3】

弧 AC＝弧 BC となるときで，体積は $9\sqrt{3}$ cm^3

【発 展 4】

（$-2+2\sqrt{10}$）cm

【発 展 5】

3 または 4

【発 展 6】

AB＝1，AD＝x とおくと，AN＝$\frac{1}{2}x$ と表せる。

長方形 ABCD∽長方形 NABM より，

AB：NA＝BC：AB だから，

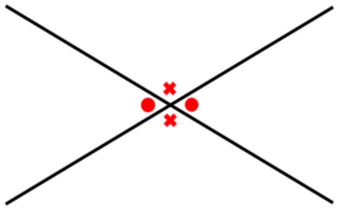
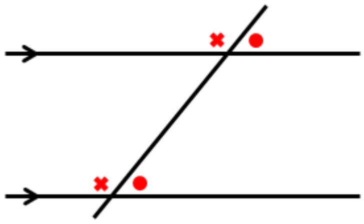
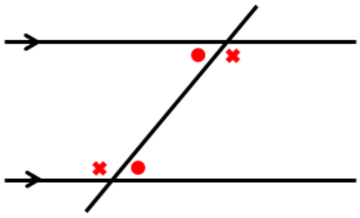
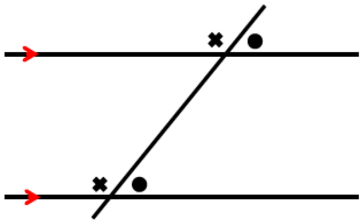
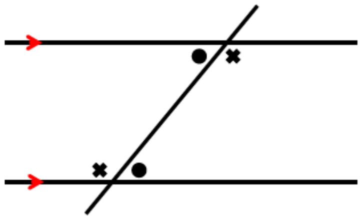
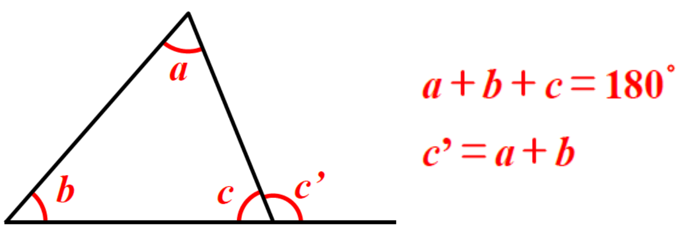
$1 : \frac{1}{2}x = x : 1$

$\frac{1}{2}x^2 = 1$

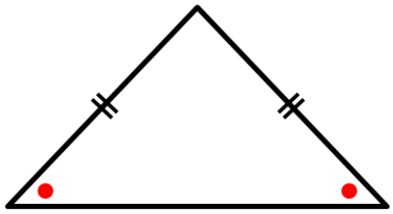
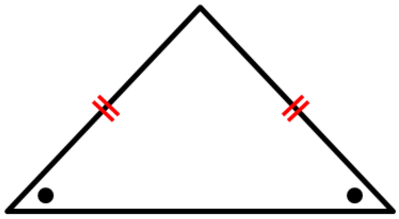
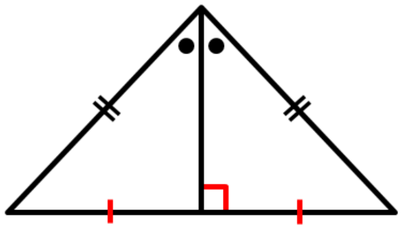
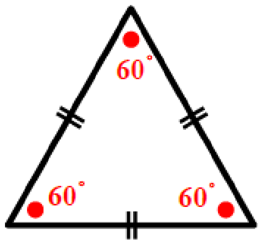
これを解いて，（$x>0$ より）　$x=\sqrt{2}$。

よって，AB:AD＝1:$\sqrt{2}$ である。

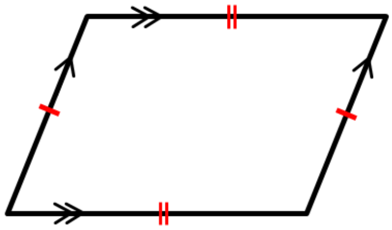
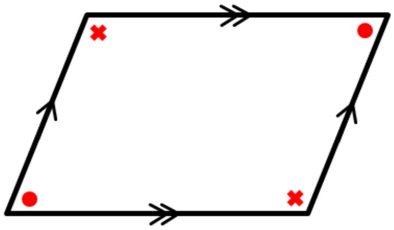
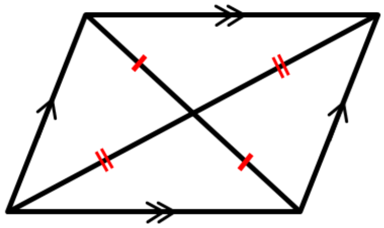
◆ 平行線と角

1. 対頂角は等しい。	
2. 平行線の同位角は等しい。	
3. 平行線の錯角は等しい。	
4. 同位角が等しい 2 直線は平行である。	
5. 錯角が等しい 2 直線は平行である。	
6. 三角形の内角の和は 180°　である。	
7. 三角形の 1 つの外角は，それととなり合わない 2 つの内角の和に等しい。	

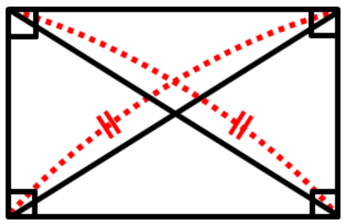
◆ 二等辺三角形（2 つの辺が等しい三角形），　正三角形（3 辺がすべて等しい三角形）

8. 二等辺三角形の底角は等しい。	
9. 2 つの角が等しい三角形は，その 2 つの角を底角とする二等辺三角形である。	
10. 二等辺三角形の頂角の二等分線は，底辺を垂直に 2 等分する。	
11. 正三角形の内角はすべて 60°　である。	

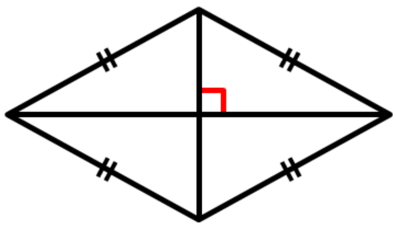
◆ 平行四辺形（2 組の対辺がそれぞれ平行な四角形）

12. 平行四辺形の 2 組の対辺はそれぞれ等しい。	
13. 平行四辺形の 2 組の対角はそれぞれ等しい。	
14. 平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わる。	

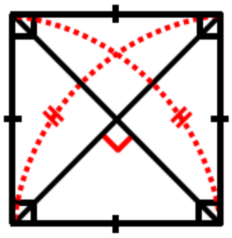
◆ 長方形（4 つの角がすべて等しい四角形）

15. 長方形の対角線は等しい。	

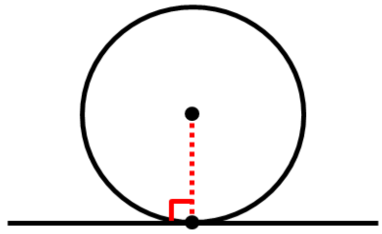
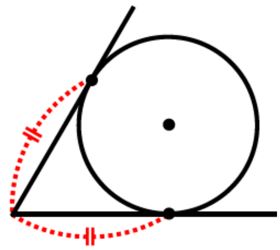
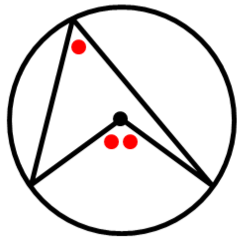
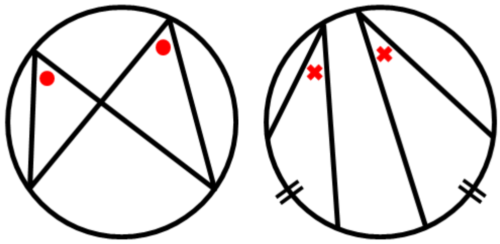
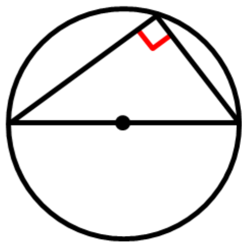
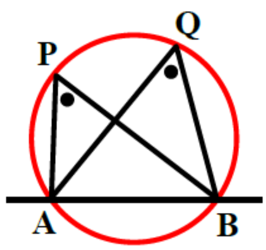
◆ ひし形（4 つの辺がすべて等しい四角形）

16. ひし形の対角線は垂直に交わる。	

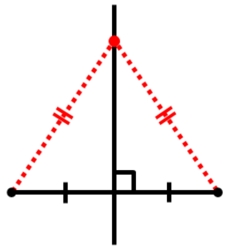
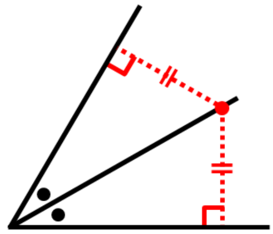
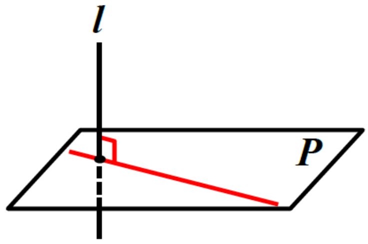
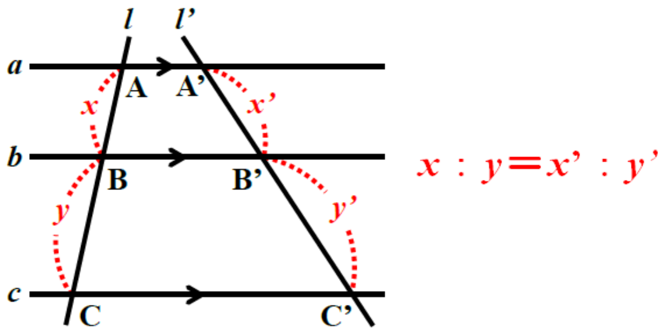
◆ 正方形（4 つの辺がすべて等しく，4 つの角がすべて等しい四角形）

17. 正方形の対角線は等しく，垂直に交わる。	

◆ 円，円周角

18. 円の接線は，接点を通る半径に垂直である。	
19. 円の 2 接線の交点は，2 つの接点から等しい距離にある。	
20. 1 つの弧に対する円周角の大きさは，その弧に対する中心角の半分である。	
21. 等しい弧に対する円周角は等しい。	
22. 半円の弧に対する円周角は直角である。	
23. 直線 AB について 2 点 P，Q が同じ側にあり，∠APB＝∠AQB ならば，4 点 A，B，P，Q は 1 つの円周上にある。 （円周角の定理の逆）	

◆ その他

24. 線分の垂直二等分線上の点は，線分の両端から等しい距離にある。	
25. 角の二等分線上の点は，2 直線から等しい距離にある。	
26. 直線 l と平面 P が垂直ならば，l と交わる P 上の直線は l に垂直である。	
27. 平行な 3 直線 a，b，c が，直線 l とそれぞれ A，B，C で交わり，直線 l' とそれぞれ A'，B'，C'で交わるとき，AB：BC＝A'B'：B'C'が成り立つ。 （平行線と線分の比）	
28. △ABC の 2 辺 AB，AC の中点をそれぞれ M，N とするとき，MN//BC，$MN＝\frac{1}{2}BC$ が成り立つ。 （中点連結定理）