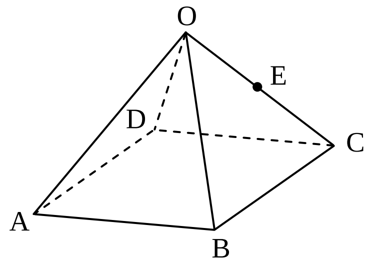
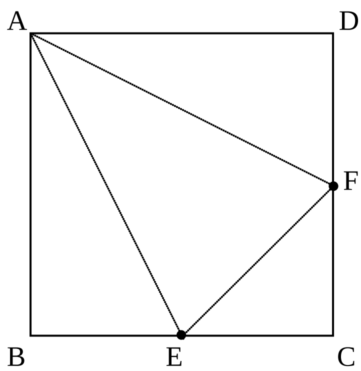
【類題 1】

すべての辺の長さが 2 cm である正四角錐 O-ABCD において，辺 OC 上に中点 E をとる。この正四角錐の側面上に，頂点 A から辺 OB と交わり点 E まで線をひくとき，最も短くなるようにひいた線の長さを求めなさい。



【類題 2】

1 辺が 6cm の正方形 ABCD について，辺 BC 上に中点 E，辺 CD 上に中点 F をそれぞれとる。点 A，E，F を結んでできる線分 AE，EF，FA を折り目として立体を組み立てると，3 点 B，C，D が 1 点に集まるのでその点を O として三角錐 O-AEF をつくる。このとき，次の各問に答えなさい。



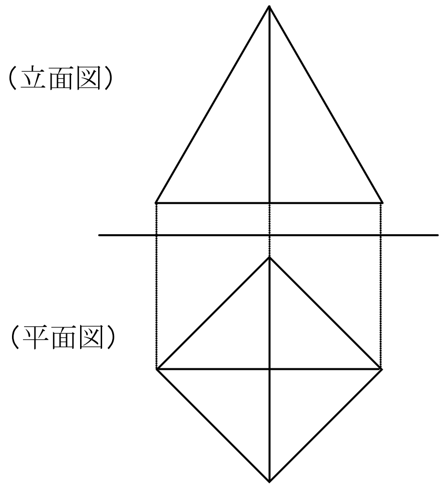
(1) △AEF の面積を求めなさい。

(2) 三角錐 O-AEF の体積を求めなさい。

(3) 三角錐 O-AEF の頂点 O から面 AEF に下ろした垂線の長さを求めなさい。

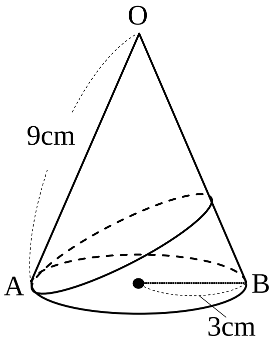
【類題 3】

右の図は，正四角錐の投影図です。この正四角錐の立面図は，1 辺の長さが 6cm の正三角形です。この正四角錐の体積を求めなさい。



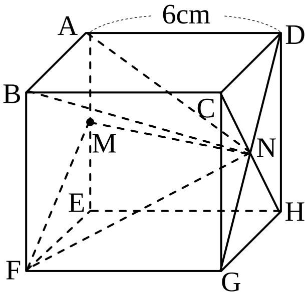
【類題 4】

底面の半径が 3cm, 母線の長さが 9cm の円錐があります。底面の 1 つの直径を AB とし，円錐の頂点を O とします。この円錐の側面上に右の図のように点 A から線分 OB と交わり点 A まで線を引くとき, 最も短くなるように引いた線の長さを求めなさい。



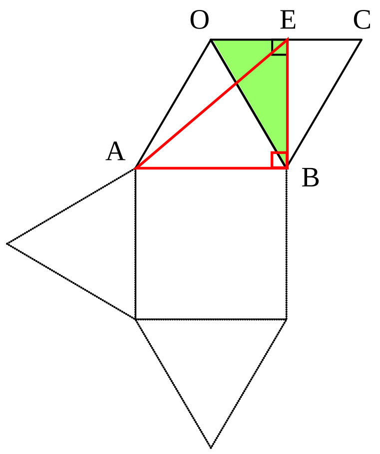
【類題 5】

右の図のように，1 辺が 6cm の立方体 ABCD-EFGH があります。辺 AE の中点を M，正方形 CDHG の対角線の交点を N とするとき，四角錐 N-ABFM の体積を求めなさい。



【類題 1】

〔考え方〕



展開図で考えたとき、左の図の AE が求める長さです。

① △OBE は 30°，60°，90° の直角三角形
BE は正三角形 OBC の OC を底辺にしたときの高さにあたるので，∠OBE＝30°，∠BEO＝90° です。
OB＝2cm，OE＝1cmより，EB＝$\sqrt{3}$cmと求められます。

② △ABE は直角三角形
∠ABO＝60°，∠OBE＝30° より，∠ABE＝90° とわかるので，△ABEは直角三角形です。AB＝2cm，EB＝$\sqrt{3}$cmより，三平方の定理を使うと，AE＝$\sqrt{7}$cmと求められます。

〔解答〕

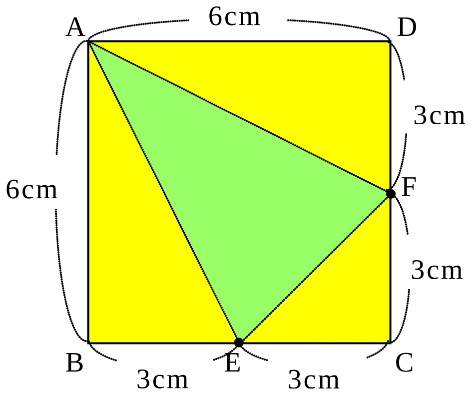
△OBC は正三角形で，点 E は OC の中点より、∠OBE＝30°，∠BEO＝90°
よって△OBE は直角三角形である。
OB＝2，OE＝1 より，三平方の定理を用いると，$EB^2+1^2=2^2$ となり
EB＞0 なので，EB＝$\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$と求められる。
また，∠ABO＝60°，∠OBE＝30° だから，∠ABE＝90°
よって△ABE は直角三角形である。
AB＝2，EB＝$\sqrt{3}$より，三平方の定理を用いると，

$AE^2=2^2+(\sqrt{3})^2$
$=4+3$
$=7$　　AE＞0 なのでAE＝$\sqrt{7}$と求められる。

答え　$\sqrt{7}$cm

【類題　2】

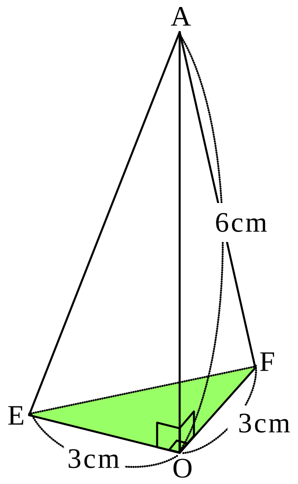
〔考え方〕



(1) 正方形 ABCD の面積から，△AEF 以外の三角形の面積をひく

正方形 ABCD－(△ABE＋△CEF＋△ADF)で△AEF の面積を求めることができます。

$6\times6-\left(3\times6\times\frac{1}{2}+3\times3\times\frac{1}{2}+3\times6\times\frac{1}{2}\right)=\frac{27}{2}\text{cm}^2$

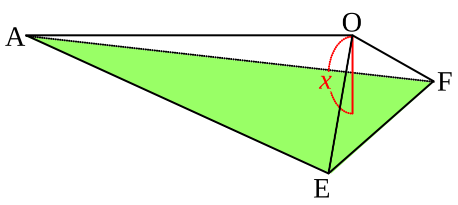


(2) △OEF を底面とした三角錐 A-OEF で考える

∠AOE＝90°，∠AOF＝90° より，△OEFを底面としてみると，AOは三角錐A-OEFにおける高さとなる。また，∠EOF＝90°，OE＝OFより，△OEFは直角二等辺三角形になることがわかるので，三角錐A-OEF

$=3\times3\times\frac{1}{2}\times6\times\frac{1}{3}=9\text{ cm}^3$ となります。

三角錐 O-AEF＝三角錐 A-OEF より，求める体積は 9cm^3



(3) 体積を表す式から高さを求める

(2) より，三角錐O-AEF＝9cm^3 と求められているので，三角錐O-AEFの頂点Oから面AEFに下ろした垂線の長さを

xとおくと，△AEF$\times x\times\frac{1}{3}=9\text{cm}^3$ となる。

(1) より，△AEF＝$\frac{27}{2}$だから，$\frac{27}{2}\times x\times\frac{1}{3}=9$ を解いてx

＝2 となる。

〔解 答〕

(1)
△AEF＝正方形 ABCD－(△ABE＋△CEF＋△ADF)で求められるので,

$6\times6-\left(3\times6\times\frac{1}{2}+3\times3\times\frac{1}{2}+3\times6\times\frac{1}{2}\right)=\frac{27}{2}$

答え　$\frac{27}{2}\mathrm{cm}^2$

(2)
三角錐 O-AEF＝三角錐 A-OEF より,

三角錐A-OEF＝$3\times3\times\frac{1}{2}\times6\times\frac{1}{3}=9$

答え　$9\mathrm{cm}^3$

(3)
三角錐 O-AEF の頂点 O から面 AEF に下ろした垂線の長さを x とおくと,
(2)より, 三角錐 O-AEF の体積は $9\mathrm{cm}^3$ と求められているので,

△AEF$\times x\times\frac{1}{3}=9\mathrm{cm}^3$ と表せる。

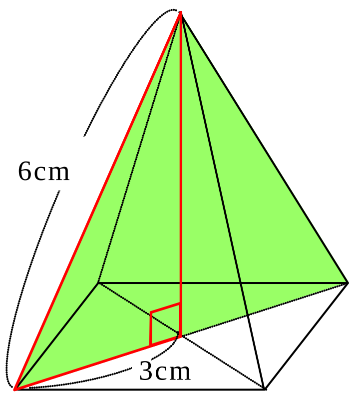
(1)より, △AEF＝$\frac{27}{2}$だから,

$\frac{27}{2}\times x\times\frac{1}{3}=9$ となり, これを解いて$x=2$ と求められる。

答え　2cm

【類題 3】

〔考え方〕



① 正三角形（二等辺三角形）の性質を利用する

立面図で見ている三角形は，左図の緑色の部分です。正三角形（二等辺三角形）の性質より，頂点から垂線を下すと，底辺を二等分する。よって赤線で囲まれた三角形は斜辺が 6cm，他の一辺が 3cm の直角三角形となります。

三平方の定理を使うと，この正四角錐の高さは $3\sqrt{3}$cm と求められます。

なお，正三角形の角はすべて 60 度ということから，三辺の比が $1:\sqrt{3}:2$ になることを利用して求めることもできます。

② 正方形（ひし形）の面積＝対角線×対角線×$\frac{1}{2}$

底面の正方形の対角線は 6cm より，

$6\times6\times\frac{1}{2}=18\text{cm}^2$

③ 錐体の体積＝底面積×高さ×$\frac{1}{3}$

① ②より，この正四角錐の体積は，

$18\times3\sqrt{3}\times\frac{1}{3}=18\sqrt{3}\text{cm}^3$ となります。

〔解答〕

正三角形の性質より，頂点から垂線を下すと，底辺を二等分する。

よって，正四角錐の高さを $x$cm とおくと，三平方の定理より、

$3^2+x^2=6^2$

これを解くと，$x=3\sqrt{3}$（cm）となる。

底面の正方形の対角線は 6cmより，正方形の面積＝対角線×対角線×$\frac{1}{2}$で求められるので，

$6\times6\times\frac{1}{2}=18$（$\text{cm}^2$）

錐体の体積＝底面積×高さ×$\frac{1}{3}$より，この正四角錐の体積は，

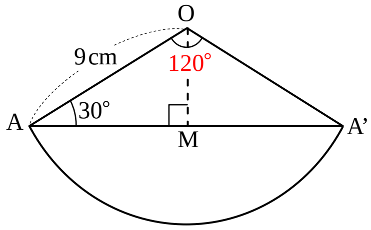
$18\times3\sqrt{3}\times\frac{1}{3}=18\sqrt{3}$ （cm^3）となる。

答え $18\sqrt{3}\text{cm}^3$

【類題　4】

〔考 え 方〕

円錐において，円錐の側面を展開してできるおうぎ形の中心角は $360^\circ\times\dfrac{\text{底面の半径}}{\text{母線}}$ で求められる。よって，おうぎ形の中心角 $=360^\circ\times\dfrac{3}{9}=120^\circ$ である。側面の展開図は右のようになる。△OAA’は頂角 120°，底角 30°の二等辺三角形なので，O から AA’に垂線 OM を引くと点 M は線分 AA’の中点になる。すると，△OAMは 3 辺の長さの比が $1:\sqrt{3}:2$ なので，



$\mathrm{AM}=\mathrm{A'M}=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$cmとなるから，AA’＝ $\boxed{9\sqrt{3}\text{ cm}}$

【ポイント】頂角が 120° の二等辺三角形の 3 辺の比は $1:1:\sqrt{3}$ である。

これを使えば，$\mathrm{AA'}=\sqrt{3}\mathrm{OA}=9$　$9\sqrt{3}$cmと素早く答えが出せる。

〔解 答〕

$9\sqrt{3}$ cm

【類題　5】

〔考 え 方〕

この立体の見取図を投影図にしてみると右の図 1 のようになる。

四角形 ABFM を底面にすると高さは点 N から四角形 ABFM に引いた垂線になる。これは立面図の色をつけた線分の長さに等しく立方体の 1 辺の長さに等しくなる。

四角形ABFMは台形なので面積は $(3+6)\times6\times\dfrac{1}{2}=27\text{cm}^2$ である。

よって，四角錐N-ABFMの体積は $27\times6\times\dfrac{1}{3}=54\text{cm}^3$ である。

〔解 答〕

54cm^3

図 1

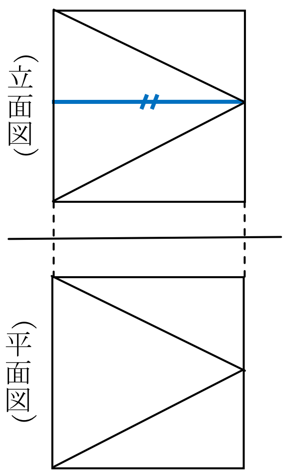


図 2