数学　類題にチャレンジ　〔整数　問題編〕

【類題　1】

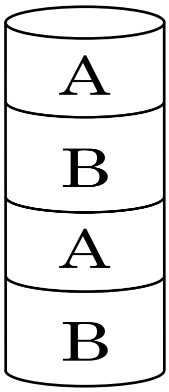
120 円の品物 A と 150 円の品物 B をそれぞれ何個かずつ買ったところ，代金は 2400 円になりました。このときの品物 A，B の個数の組み合わせをすべて求めます。品物 A，B の個数をそれぞれ a 個，b 個として，a，b の値の組$(a,\ b)$をすべて求めなさい。ただし，品物 A，B はいずれも 1 個以上買ったものとします。

【類題　2】

a，b を自然数とします。関数 $y=-2x+15$ のグラフと方程式 $ax+by=36$ のグラフがあります。2 つのグラフの交点の x 座標が 4 になるとき，a，b の値の組$(a,\ b)$を求めなさい。

【類題　3】

半径 5cm，高さ 5cm の円柱 A と半径 5cm，高さ 6cm の円柱 B がそれぞれたくさんあります。円柱 A，B をそれぞれ何個かずつ積んで大きな円柱を作ったところ，その円柱の表面積は $890\pi\text{cm}^2$ になりました。このときの円柱 A，B の個数の組み合わせをすべて求めます。円柱 A，B の個数をそれぞれ a 個，b 個として，a，b の値の組$(a,\ b)$をすべて求めなさい。ただし，円柱 A，B はいずれも 1 個以上使い，円柱を積むときは底面どうしがぴったり重なるように積むものとします。



【類題　4】

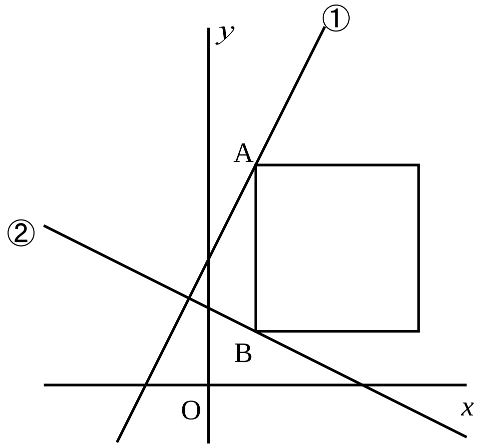
生徒数が 30 人以上 40 人未満のクラスで，生徒が今年読んだ本の冊数を調査しました。右の表は，この調査の結果をまとめた度数分布表です。この度数分布表から求めた平均値が 11 冊になるとき，表の a，b の値として考えられる整数の組$(a,\ b)$をすべて求めなさい。

階級（冊）	度数（人）
0 以上～4 未満	2
4 ～ 8	10
8 ～ 12	a
12 ～ 16	b
16 ～ 20	4
20 ～ 24	2

$\boxed{\text{数学}}$ 類題にチャレンジ 〔関数 問題編〕

【類題 1】

右の図で直線①，②はそれぞれ関数 $y=2x+5$，$y=-\frac{1}{2}x+3$ のグラフです。直線①上に点 A，直線②上に点 B を，2 点 A，B の x 座標が等しくなるようにとります。点 A の x 座標を a として，次の各問いに答えなさい。

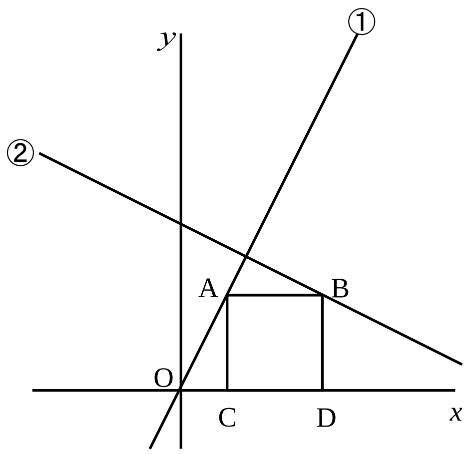


（1） 2 点 A，B の座標を，それぞれ a を用いて表しなさい。

（2） 座標の 1 目盛りを 1cm とします。線分 AB を一辺とする正方形の面積が 64cm^2 になるような a の値をすべて求めなさい。

【類題 2】

右の図で，直線①，②はそれぞれ関数 $y=2x$，$y=-\frac{1}{2}x+5$ の
グラフです。直線①上に点 A，直線②上に点 B を，2 点 A，B の y 座標が等しくなるようにとります。ただし，2 点 A，B の y 座標はいずれも正の数とします。点 A の x 座標を a として，次の各問いに答えなさい。

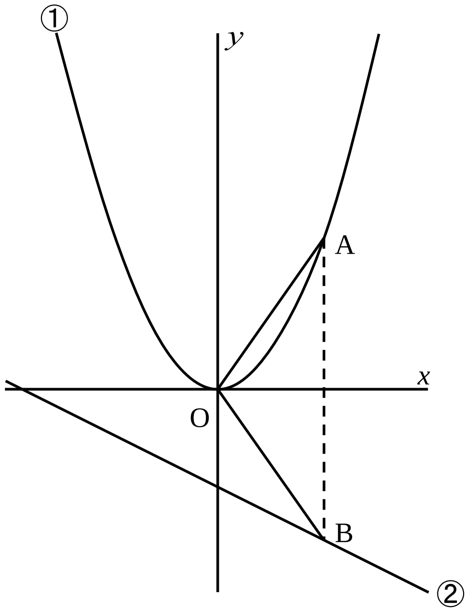


（1） 点 B の x 座標を，a を用いて表しなさい。

（2） 2 点 A，B から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点をそれぞれ C，D とします。四角形 ACDB が正方形になるような a の値をすべて求めなさい。

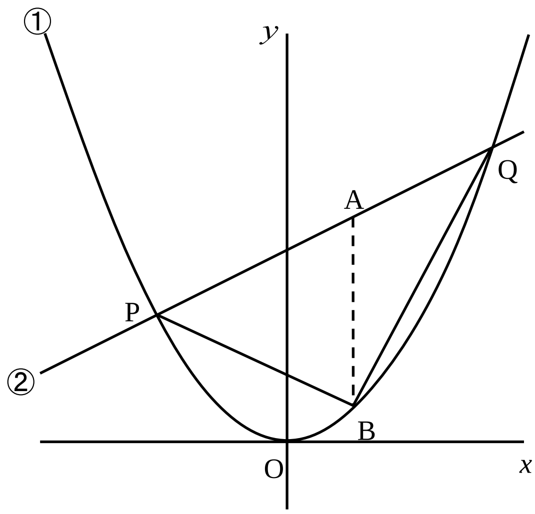
【類 題 3】

右の図で，曲線①は関数 $y=\frac{1}{2}x^2$，直線②は関数 $y=-\frac{1}{2}x-3$ のグラフです。曲線①上に点 A，直線②上に点 B を，2 点 A，B の x 座標が等しくなるようにとります。このとき，OA＝OB となるような点 A の座標をすべて求めなさい。



【類 題 4】

a を正の数とします。右の図で，曲線①，直線②はそれぞれ関数 $y=ax^2$，$y=\frac{1}{2}x+6$ のグラフです。曲線①と直線②の交点を x 座標が小さい順に P，Q とします。点 P の x 座標は－4 です。線分 PQ 上に点 A，曲線①上に点 B を，2 点 A，B の x 座標が等しくなるようにとります。点 A の x 座標を t とするとき，次の各問いに答えなさい。ただし，座標の 1 目盛りを 1cm とします。



（1） a の値を求めなさい。

（2） $t=2$ のとき，△PBQ の面積を求めなさい。

（3）△PBQ の面積が 25cm^2 になるような t の値をすべて求めなさい。

数学 類題にチャレンジ 〔整数 解答編〕

【類題 1】

代金の合計が 2400 円であることから， $120a+150b=2400$ という等式ができます。

これを次のように変形します。

両辺を 30 で割って， $4a+5b=80$

$4a$ を移項して， $5b=80-4a$

右辺を 4 でくくって， $5b=4(20-a)$ …①

この等式の右辺は 4 の倍数だから，左辺の b も 4 の倍数です。

$b=4$ を①に代入して， $20=4(20-a)$ これを解いて $a=15$

$b=8$ を①に代入して， $40=4(20-a)$ これを解いて $a=10$

$b=12$ を①に代入して， $60=4(20-a)$ これを解いて $a=5$

$b=16$ を①に代入して， $80=4(20-a)$ これを解いて $a=0$

よって $b\geqq 16$ のとき $a\leqq 0$ となるため， $(a,\ b)=\underline{(15,\ 4),\ (10,\ 8),\ (5,\ 12)}$ です。

【類題 2】

関数 $y=-2x+15$ は，$x=4$ のとき $y=-8+15=7$ になります。よって，交点の座標は $(4,\ 7)$ です。

これを $ax+by=36$ に代入して，$4a+7b=36$ という等式ができます。これを次のように変形します。

$4a$ を移項して， $7b=36-4a$

右辺を 4 でくくって， $7b=4(9-a)$ …①

この等式の右辺は 4 の倍数だから，左辺の b も 4 の倍数です。

$b=4$ を①に代入して， $28=4(9-a)$ これを解いて $a=2$

$b=8$ を①に代入して， $56=4(9-a)$ これを解いて $a=-5$

よって $b\geqq 8$ のとき $a\leqq 0$ となるため， $(a,\ b)=\underline{(2,\ 4)}$ です。

【類題 3】

円柱の側面積は（底面の周）×（高さ）で求められます。よって円柱 A，B の側面積はそれぞれ $2\pi\times5\times5=50\pi(\mathrm{cm}^2)$，$2\pi\times5\times6=60\pi(\mathrm{cm}^2)$ です。円柱 A を a 個，円柱 B を b 個積んでできる円柱の表面積が $890\pi\mathrm{cm}^2$ だから，

$50\pi\times a+60\pi\times b+5\times5\times\pi\times2=890\pi \rightarrow 50\pi a+60\pi b=840\pi$

という等式ができます。これを次のように変形します。

両辺を 10π で割って， $5a+6b=84$

$6b$ を移項して， $5a=84-6b$

右辺を 6 でくくって， $5a=6(14-b)$ …①

この等式の右辺は 6 の倍数だから，左辺の a も 6 の倍数です。

$a=6$ を①に代入して， $30=6(14-b)$ これを解いて $b=9$

$a=12$ を①に代入して， $60=6(14-b)$ これを解いて $b=4$

$a=18$ を①に代入して， $90=6(14-b)$ これを解いて $b=-1$

よって $a\geqq 18$ のとき $b\leqq 0$ となるため， $(a,\ b)=\underline{(6,\ 9),\ (12,\ 4)}$ です。

【類 題　4】

度数分布表の資料の合計は（階級値）×（度数）の合計で求められるので，資料の合計は，

$2\times2+6\times10+10\times a+14\times b+18\times4+22\times2=10a+14b+180$（冊）

と表せます。また，度数の合計（クラスの人数）は

$2+10+a+b+4+2=a+b+18$（人）…①

と表せます。（平均）×（個数）＝（合計）が成り立つので，$11(a+b+18)=10a+14b+180$ という等式ができます。これを次のように変形します。

左辺を展開して，　$11a+11b+198=10a+14b+180$

a について解いて，　$a=3b-18$

右辺を 3 でくくって，　$a=3(b-6)$ …②

この等式の右辺は 3 の倍数だから，左辺の a も 3 の倍数（0 を含む）です。

$a=0$ を②に代入して，$0=3(b-6)$　　これを解いて $b=6$

$a=3$ を②に代入して，$3=3(b-6)$　　これを解いて $b=7$

$a=6$ を②に代入して，$6=3(b-6)$　　これを解いて $b=8$

$a=9$ を②に代入して，$9=3(b-6)$　　これを解いて $b=9$

$a=12$ を②に代入して，$12=3(b-6)$　　これを解いて $b=10$

このように $(a,\ b)=(0,\ 6)$，$(3,\ 7)$，$(6,\ 8)$，$(9,\ 9)$，$(12,\ 10)$，…… と無数に解がありますが，これらの解を①に代入してみます。

$(a,\ b)=(0,\ 6)$ のとき，　①の値は $0+6+18=24$

$(a,\ b)=(3,\ 7)$ のとき，　①の値は $3+7+18=28$

$(a,\ b)=(6,\ 8)$ のとき，　①の値は $6+8+18=32$

$(a,\ b)=(9,\ 9)$ のとき，　①の値は $9+9+18=36$

$(a,\ b)=(12,\ 10)$ のとき，　①の値は $12+10+18=40$

このように，$a\leqq3$ のときクラスの人数は 30 人未満，$a\geqq12$ のときクラスの人数は 40 人以上になります。

したがって，$(a,\ b)=$(6，8)，(9，9) です。

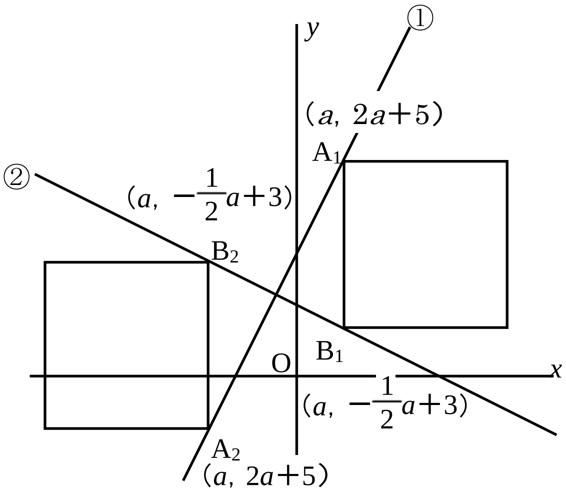
【類題 1】

(1) 点 A の x 座標を a とおきます。直線①，②の式にそれぞれ $x=a$ を代入すると

$y=2a+5,\ y=-\frac{1}{2}a+3$

となるので，2 点 A，B の座標はそれぞれ $\boxed{(a,\ 2a+5),\ (a,\ -\frac{1}{2}a+3)}$ と表せます。

(2)



(2) $64=8^2$ だから，AB＝8cm です。点 A の位置を変化させて考えると，AB＝8cm となるような 2 点 A，B の位置は，左図のように 2 通りあることが分かります。x 座標が大きい方の 2 点を A_1，B_1，x 座標が小さい方の 2 点を A_2，B_2 とします。

i) A_1，B_1 について

$A_1B_1=(2a+5)-(-\frac{1}{2}a+3)=\frac{5}{2}a+2$

と表せます。これが 8 になればよいので，

$\frac{5}{2}a+2=8$

これを解いて，$a=\frac{12}{5}$ です。

ii) A_2，B_2 について

$A_2B_2=(-\frac{1}{2}a+3)-(2a+5)=-\frac{5}{2}a-2$

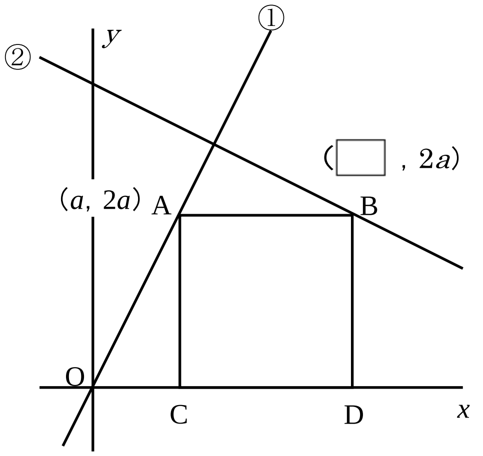
と表せます。これが 8 になればよいので，

$-\frac{5}{2}a-2=8$

これを解いて，$a=-4$ です。

以上より，$\boxed{a=-4,\ \frac{12}{5}}$ です。

【類題 2】



(1) 点 A の座標は $(a,\ 2a)$ と表せるので，点 B の y 座標も $2a$ です。$y=2a$ を直線②の式に代入して，

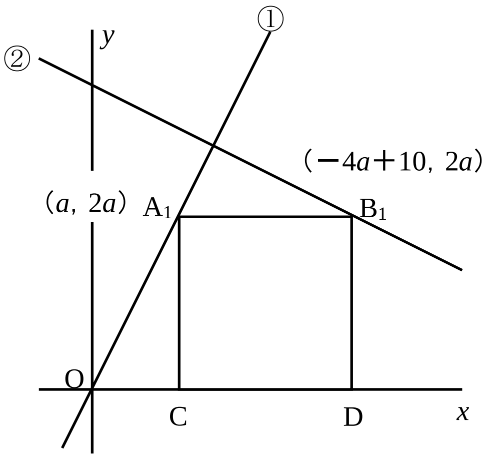
$$2a=-\frac{1}{2}x+5$$

という等式ができます。これを x について解きます。

移項して，　$\frac{1}{2}x=-2a+5$

両辺を 2 倍して，　$x=-4a+10$

よって，点 B の座標は $\boxed{(-4a+10,\ 2a)}$ です。



(2) 点 A の位置を変化させて考えると，四角形 ACDB が正方形となるような 2 点 A，B の位置は，左図のように 2 通りあることが分かります。y 座標が小さい方の 2 点を A_1，B_1，y 座標が大きい方の 2 点を A_2，B_2 とします。

i) A_1，B_1 について

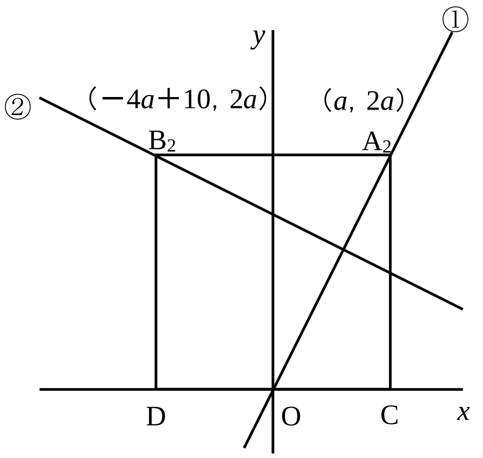
$A_1C=2a$

$A_1B_1=(-4a+10)-a=-5a+10$

と表せます。この 2 辺が等しくなるので，

$2a=-5a+10$

これを解いて，$a=\frac{10}{7}$ です。



ii) A_2，B_2 について

$A_2C=2a$

$A_2B_2=a-(-4a+10)=5a-10$

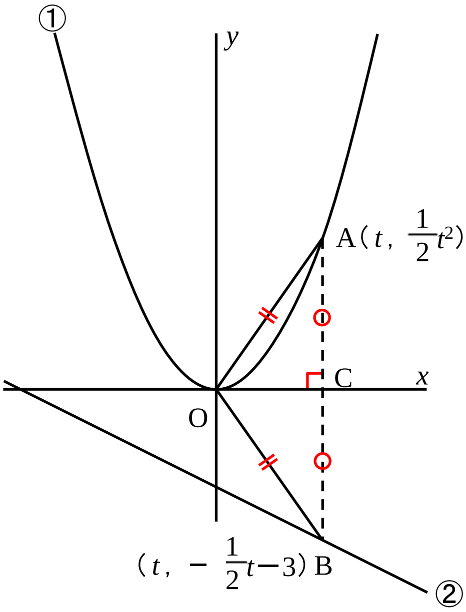
と表せます。この 2 辺が等しくなるので，

$2a=5a-10$

これを解いて，$a=\frac{10}{3}$ です。

以上より，$\boxed{a=\frac{10}{7},\ \frac{10}{3}}$ です。

【類題 3】



線分 AB と x 軸との交点を C とします。

AC＝BC ならば△OAC≡△OBC となるため，OA＝OB が成り立ちます。よって，AC＝BC となるような点 A の座標を求めればよいと分かります。

点 A の x 座標を t とします。①，② の式にそれぞれ $x=t$ を代入すると

$y=\frac{1}{2}t^2$, $y=-\frac{1}{2}t-3$

となるので，2 点 A，B の座標はそれぞれ

$\left(t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$，$\left(t,\ -\frac{1}{2}t-3\right)$ と表せます。また，点 C の y 座標は 0 なので

$AC=\frac{1}{2}t^2$

$BC=0-\left(-\frac{1}{2}t-3\right)=\frac{1}{2}t+3$

と表せます。AC＝BC だから

$\frac{1}{2}t^2=\frac{1}{2}t+3$

という方程式が得られます。これを以下のように変形して解きます。

両辺を 2 倍して，　$t^2=t+6$

左辺に移項して，　$t^2-t-6=0$

左辺を因数分解して，　$(t-3)(t+2)=0$

よって解は $t=-2$, 3 の二つです。この問題では点 A の位置に条件がないため，どちらも問いにあっています。それぞれ y 座標は

$$\frac{1}{2}\times(-2)^2=2,\ \frac{1}{2}\times3^2=\frac{9}{2}$$

になります。以上より，点 A の座標は

$\boxed{(-2,\ 2),\ \left(3,\ \frac{9}{2}\right)}$ です。

【類 題 4】

(1) 点 P の x 座標−4 を直線②の式に代入すると

$$y=\frac{1}{2}\times(-4)+6=4$$

となるので，点 P の座標は (−4, 4) です。これを $y=ax^2$ に代入し，a について解きます。

$$4=a\times(-4)^2 \Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{4}}$$

ここで，点 Q の座標を求めておきます。①，②の式を連立させて解きます。

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{4}x^2 & \cdots ① \\ y=\dfrac{1}{2}x+6 & \cdots ② \end{cases}$$

①を②に代入して，$\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{2}x+6$ という 2 次方程式ができます。これを以下のように解きます。

両辺を 4 倍して，　$x^2=2x+24$

左辺に移項して，　$x^2-2x-24=0$

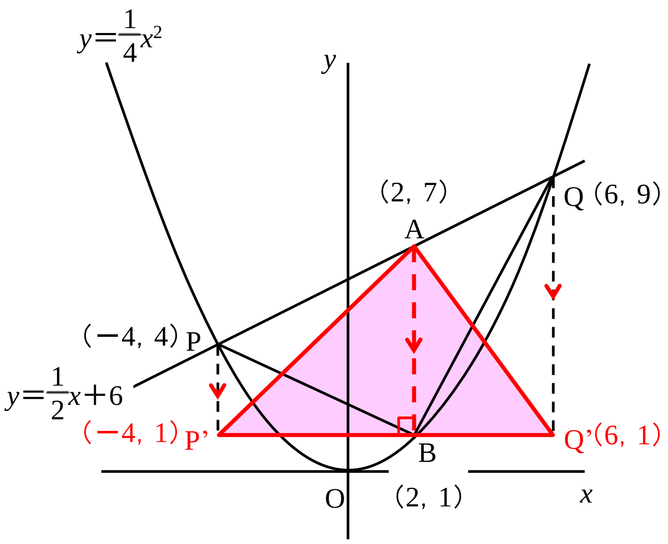
因数分解して，　$(x+4)(x-6)=0$

よって解は $x=-4,\ 6$ となりますが，−4 は点 P の x 座標だから，点 Q の x 座標は 6 です。

これを①に代入すると

$$y=\frac{1}{4}\times6^2=9$$

となるので，点 Q の座標は (6, 9) です。



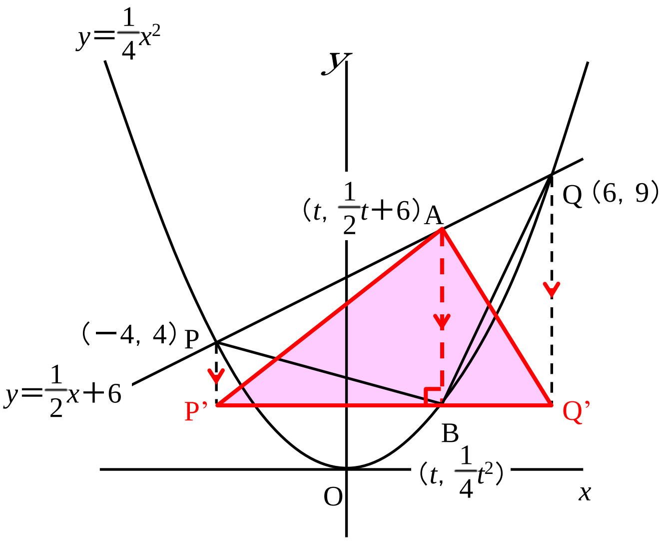
(2) ①，② の式に $x=2$ を代入すると

$y=\frac{1}{4}\times2^2=1$，$y=\frac{1}{2}\times2+6=7$

となるので，2 点 A，B の座標はそれぞれ (2, 7)，(2, 1) です。

△PBQ の面積を求める際，等積変形を用いると計算が簡潔になります。左図のように 2 点 P’，Q’を PP’//AB//QQ’，AB⊥P’Q’を満たすようにとると，△PAB＝△P’AB，△QAB＝△Q’AB より△PBQ＝△AP’Q’成り立ちます。P’Q’＝6−(−4)＝10cm，AB＝7−1＝6cm だから，求める面積は

$$10\times6\times\frac{1}{2}=\boxed{30\text{cm}^2}$$ です。



(3) (2) 同様，等積変形を利用します。2点A, Bの座標はそれぞれ$\left(t,\ \frac{1}{2}t+6\right)$，$\left(t,\ \frac{1}{4}t^2\right)$と表せ，$AB=\frac{1}{2}t+6-\frac{1}{4}t^2$と表せます。

P'Q'＝10cmだから，

$\triangle AP'Q' = 10\times\left(\frac{1}{2}t+6-\frac{1}{4}t^2\right)\times\frac{1}{2}$

$= -\frac{5}{4}t^2+\frac{5}{2}t+30$

と表せます。これが$25\mathrm{cm}^2$になればよいので，

$-\frac{5}{4}t^2+\frac{5}{2}t+30=25$

という方程式が得られます。これを以下のように変形して解きます。

25を移項して，$-\frac{5}{4}t^2+\frac{5}{2}t+5=0$

両辺を$-\frac{4}{5}$倍して，$t^2-2t-4=0$

解の公式等を用いて，$t=1\pm\sqrt{5}$

よって解は$t=1\pm\sqrt{5}$の2つです。

$2<\sqrt{5}<3$ より$3<1+\sqrt{5}<4$，$-3<-\sqrt{5}<-2$ より$-2<1-\sqrt{5}<-1$が言えるので，この2つの解はどちらも問いに合っています。

以上より，$\boxed{t=1\pm\sqrt{5}}$ です。