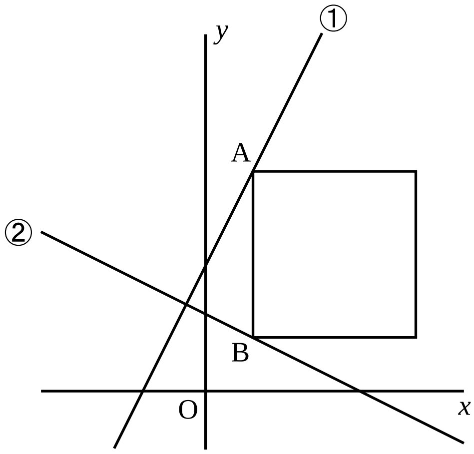
数学　類題にチャレンジ　〔関数　問題編〕

【類題 1】

右の図で直線①，②はそれぞれ関数 $y=2x+5$，$y=-\frac{1}{2}x+3$ のグラフです。直線①上に点 A，直線②上に点 B を，2 点 A，B の x 座標が等しくなるようにとります。点 A の x 座標を a として，次の各問いに答えなさい。

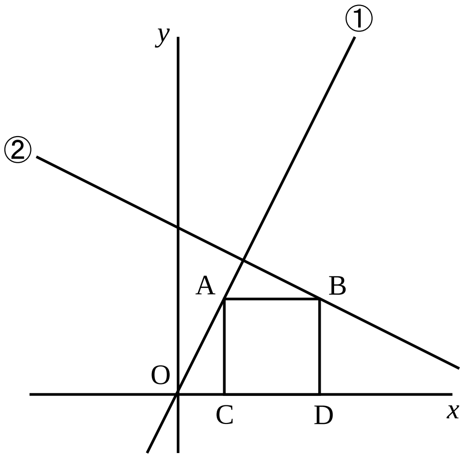


（1）2 点 A, B の座標を，それぞれ a を用いて表しなさい。

（2）座標の 1 目盛りを 1cm とします。線分 AB を一辺とする正方形の面積が 64cm^2 になるような a の値をすべて求めなさい。

【類題 2】

右の図で，直線①，②はそれぞれ関数 $y=2x$，$y=-\frac{1}{2}x+5$ のグラフです。直線①上に点 A，直線②上に点 B を，2 点 A，B の y 座標が等しくなるようにとります。ただし，2 点 A，B の y 座標はいずれも正の数とします。点 A の x 座標を a として，次の各問いに答えなさい。



（1）点 B の x 座標を，a を用いて表しなさい。

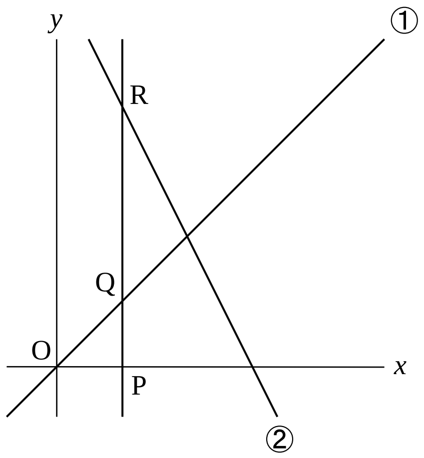
（2）2 点 A，B から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点をそれぞれ C，D とします。四角形 ACDB が正方形になるような a の値をすべて求めなさい。

【類 題 3】

先生と生徒の会話を読んで，次の各問いに答えなさい。

先生：次の【問題】を考えてみましょう。

【問題】
右の図で，直線①は関数 $y=x$ のグラフ，直線②は関数 $y=-2x+10$ のグラフです。x 軸上に点 P をとり，点 P を通り y 軸に平行な直線と直線①，②との交点をそれぞれ Q，R とします。線分 QR の長さが 9 になるときの点 P の x 座標をすべて求めなさい。



先生：点 P の x 座標を a とおくと，点 Q と点 R の座標はそれぞれどう表せるでしょうか。

生徒：点 Q の座標は(a, [ア])，点 R の座標は(a, [イ])になります。

先生：では次に，点 R の y 座標が点 Q の y 座標より大きいとき，線分 QR の長さを a を用いて表してみましょう。

生徒：[ア] と [イ] の差を計算して，QR＝ [ウ] となります。

先生：そうですね。[ウ] ＝9 という方程式を解けば，a＝ [エ] と分かります。

生徒：①<u>点 R の y 座標が点 Q の y 座標より小さい場合</u>も考えた方がよいですか。

先生：はい，その通りです。その場合，線分 QR の長さを表す式が変わることに気をつけなくてはなりません。では，もうひとつの a の値も求めてみましょう。

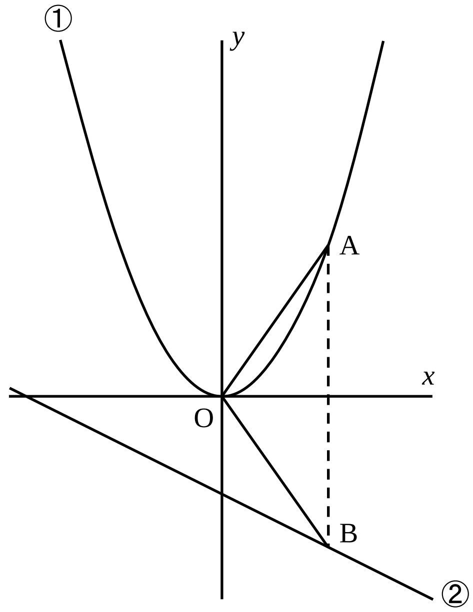
(1) [ア]，[イ]，[ウ] にあてはまる式をそれぞれ答えなさい。

(2) [エ] にあてはまる数を求めなさい。

(3) 下線部①の場合において，点 P の x 座標を求めなさい。

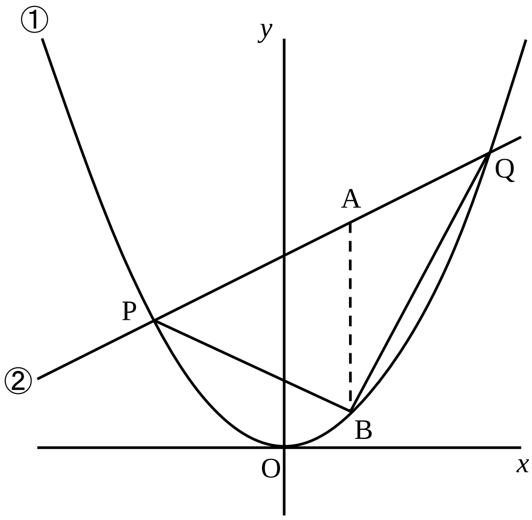
【類 題 4】

右の図で，曲線①は関数 $y=\frac{1}{2}x^2$，直線②は関数 $y=-\frac{1}{2}x-3$ のグラフです。曲線①上に点 A，直線②上に点 B を，2 点 A，B の x 座標が等しくなるようにとります。このとき，OA＝OB となるような点 A の座標をすべて求めなさい。



【類 題 5】

a を正の数とします。右の図で，曲線①，直線②はそれぞれ関数 $y=ax^2$，$y=\frac{1}{2}x+6$ のグラフです。曲線①と直線②の交点を x 座標が小さい順に P，Q とします。点 P の x 座標は－4 です。線分 PQ 上に点 A，曲線①上に点 B を，2 点 A，B の x 座標が等しくなるようにとります。点 A の x 座標を t とするとき，次の各問いに答えなさい。ただし，座標の 1 目盛りを 1cm とします。



（1） a の値を求めなさい。

（2） $t=2$ のとき，△PBQ の面積を求めなさい。

（3） △PBQ の面積が 25cm^2 になるような t の値をすべて求めなさい。

数学　類題にチャレンジ　〔関数と面積　解答編〕

【類題 1】

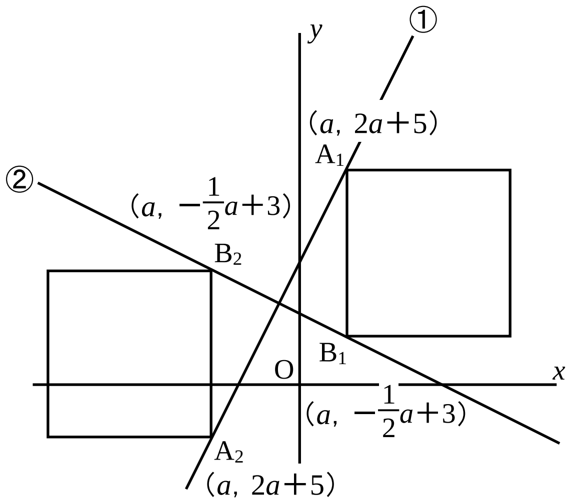
(1)

入試必勝ポイント
①座標を文字で表す

点Aの x 座標を a とおきます。直線①，②の式にそれぞれ $x=a$ を代入すると

$$y=2a+5,\ \ y=-\frac{1}{2}a+3$$

となるので，2点A，Bの座標はそれぞれ $\boxed{A(a,\ 2a+5),\ B(a,\ -\frac{1}{2}a+3)}$ と表せます。



(2)

入試必勝ポイント
②長さを座標の差で表す

$64=8^2$ だから，AB＝8cm です。
点Aの位置を変化させて考えると，AB＝8cm となるような2点A，Bの位置は，左図のように2通りあることが分かります。x 座標が大きい方の2点を A_1，B_1，x 座標が小さい方の2点を A_2，B_2 とします。

i）A_1，B_1 について

$$A_1B_1=(2a+5)-(-\frac{1}{2}a+3)=\frac{5}{2}a+2$$

と表せます。これが8になればよいので，

$$\frac{5}{2}a+2=8$$

これを解いて，$a=\frac{12}{5}$ です。

ii）A_2，B_2 について

$$A_2B_2=(-\frac{1}{2}a+3)-(2a+5)=-\frac{5}{2}a-2$$

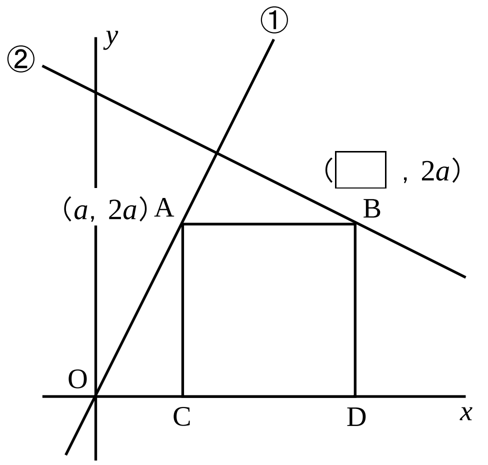
と表せます。これが8になればよいので，

$$-\frac{5}{2}a-2=8$$

これを解いて，$a=-4$ です。

以上より，$\boxed{a=-4,\ \frac{12}{5}}$ です。

【類題 2】



（1）

入試必勝ポイント
①座標を文字で表す

点 A の座標は（a, $2a$）と表せるので，
点 B の y 座標も $2a$ です。$y=2a$ を直線②の式に代入して，

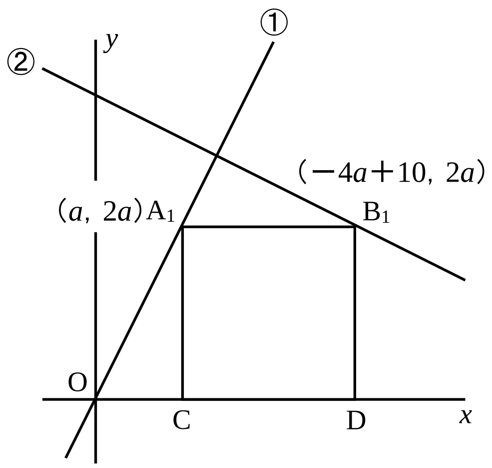
$$2a=-\frac{1}{2}x+5$$

という等式ができます。これを x について解きます。

移項して，　$\frac{1}{2}x=-2a+5$

両辺を 2 倍して，　$x=-4a+10$

よって，点 B の座標は $\boxed{\mathrm{B}(-4a+10,\ 2a)}$ です。



（2）

入試必勝ポイント
②長さを座標の差で表す

点 A の位置を変化させて考えると，四角形 ACDB が正方形となるような 2 点 A，B の位置は，左図のように 2 通りあることが分かります。y 座標が小さい方の 2 点を A_1，B_1，y 座標が大きい方の 2 点を A_2，B_2 とします。

i）A_1，B_1 について

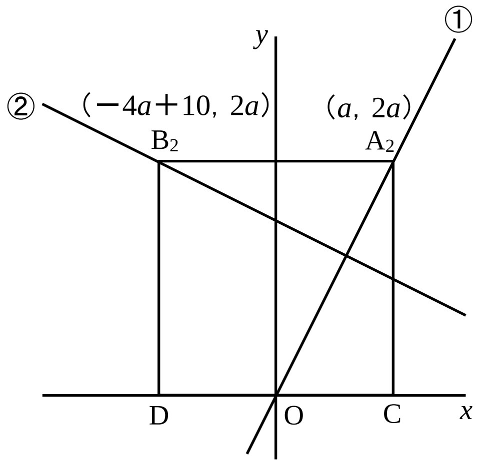
$A_1C=2a$

$A_1B_1=(-4a+10)-a=-5a+10$

と表せます。この 2 辺が等しくなるので，

$$2a=-5a+10$$

これを解いて，　$a=\frac{10}{7}$ です。



ii) A_2, B_2 について

$A_2C = 2a$

$A_2B_2 = a - (-4a + 10) = 5a - 10$

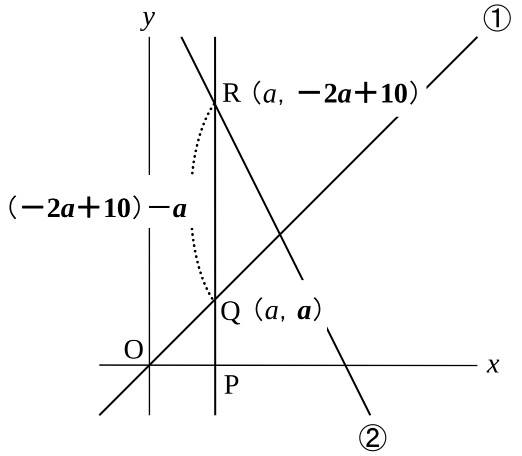
と表せます。この 2 辺が等しくなるので，

$2a = 5a - 10$

これを解いて，$a = \frac{10}{3}$ です。

以上より，$\boxed{a = \frac{10}{7},\ \frac{10}{3}}$ です。

【類題 3】



(1)

入試必勝ポイント
①座標を文字で表す
②長さを座標の差で表す

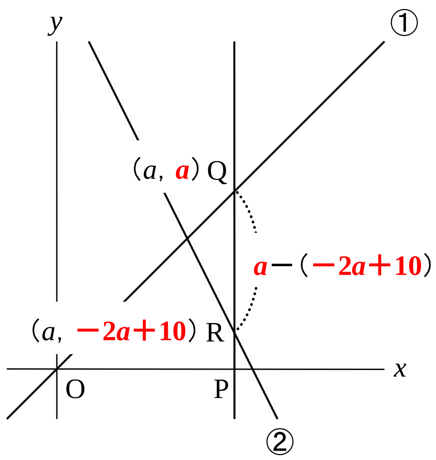
点 Q の y 座標は，直線①の式 $y=x$ に $x=a$ を代入することで $y=a$ と表せます。
点 R の y 座標は，直線②の式 $y=-2x+10$ に $x=a$ を代入することで $y=-2a+10$ と表せます。
線分 QR の長さは(点 R の y 座標)−(点 Q の y 座標)で求められるので，$(-2a+10)-a = -3a+10$ と表せます。

以上より，$\boxed{ア\ a\quad イ\ -2a+10\quad ウ\ -3a+10}$ です。

(2) $-3a+10=9$ を解いて $a = \boxed{\frac{1}{3}}$ と求められます。

(3)

入試必勝ポイント
②長さを座標の差で表す
③会話文中のヒントを探す



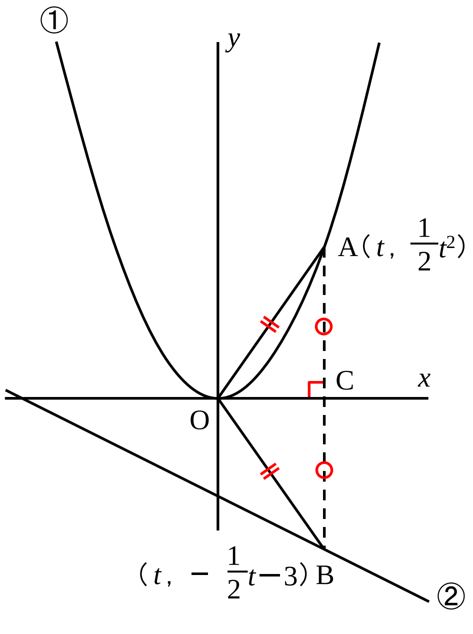
先生のセリフをヒントに，線分 QR の長さを式で表します。点 Q の y 座標が点 R の y 座標より大きい場合，線分 QR の長さは(点 Q の y 座標)−(点 R の y 座標)で求められます。QR=9 より，a について次のような方程式が立てられます。

$a-(-2a+10)=9$

これを解いて，$a = \boxed{\frac{19}{3}}$ と求められます。

【類 題 4】

入試必勝ポイント
①座標を文字で表す
②長さを座標の差で表す



線分 AB と x 軸との交点を C とします。AC＝BC ならば△OAC≡△OBC となるため，OA＝OB が成り立ちます。

よって，AC＝BC となるような点 A の座標を求めればよいと分かります。

点 A の x 座標を t とします。①，②の式にそれぞれ $x=t$ を代入すると

$y=\frac{1}{2}t^2$，$y=-\frac{1}{2}t-3$

となるので，2 点 A，B の座標はそれぞれ $(t, \frac{1}{2}t^2)$，$(t, -\frac{1}{2}t-3)$ と表せます。

また，点 C の y 座標は 0 なので，

$AC=\frac{1}{2}t^2$

$BC=0-(-\frac{1}{2}t-3)=\frac{1}{2}t+3$

と表せます。AC＝BC だから，

$\frac{1}{2}t^2=\frac{1}{2}t+3$

という方程式が得られます。これを以下のように変形して解きます。

両辺を 2 倍して，　$t^2=t+6$

左辺に移項して，　$t^2-t-6=0$

左辺を因数分解して，　$(t-3)(t+2)=0$

よって，解は $t=-2$，3 の 2 つです。この問題では点 A の位置に条件がないため，どちらも問いに合っています。それぞれ y 座標は，

$\frac{1}{2}\times(-2)^2=2$，$\frac{1}{2}\times3^2=\frac{9}{2}$

になります。以上より，点 A の座標は

$\boxed{(-2, 2),\ (3, \frac{9}{2})}$ です。

【類 題 5】

（1）点 P の x 座標－4 を直線②の式に代入すると，

$$y=\frac{1}{2}\times(-4)+6=4$$

となるので，点 P の座標は(－4, 4)です。これを $y=ax^2$ に代入し，a について解きます。

$$4=a\times(-4)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a=\frac{1}{4}}$$

ここで，点 Q の座標を求めておきます。①，②の式を連立させて解きます。

$$\begin{cases} y=\frac{1}{4}x^2 & \cdots ① \\ y=\frac{1}{2}x+6 & \cdots ② \end{cases}$$

①を②に代入して，$\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{2}x+6$ という 2 次方程式ができます。これを以下のように解きます。

両辺を 4 倍して，$x^2=2x+24$

左辺に移項して，$x^2-2x-24=0$

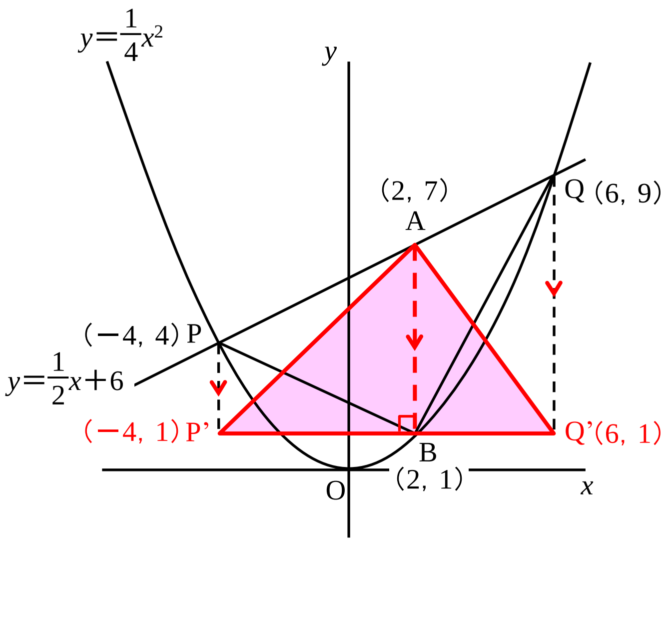
因数分解して，$(x+4)(x-6)=0$

よって，解は $x=-4,\ 6$ となりますが，－4 は点 P の x 座標だから，点 Q の x 座標は 6 です。

これを①に代入すると

$$y=\frac{1}{4}\times 6^2=9$$

となるので，点 Q の座標は(6, 9)です。



（2）①，②の式に $x=2$ を代入すると

$$y=\frac{1}{4}\times 2^2=1,\quad y=\frac{1}{2}\times 2+6=7$$

となるので，2 点 A，B の座標はそれぞれ(2, 7)，(2, 1)です。

△PBQ の面積を求める際，等積変形を用いると計算が簡潔になります。左図のように 2 点 P’，Q’を PP’//AB//QQ’，AB⊥P’Q’を満たすようにとると，

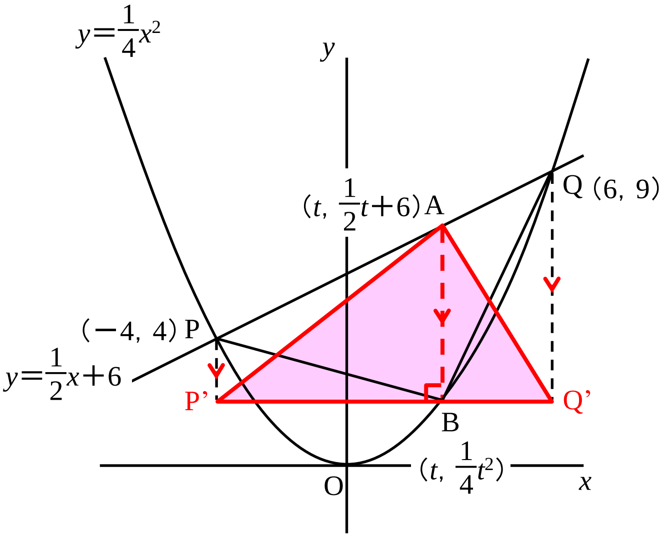
△PAB＝△P’AB，△QAB＝△Q’AB より，

△PBQ＝△AP’Q’が成り立ちます。

P’Q’＝6－(－4)＝10cm，

AB＝7－1＝6cm だから，求める面積は，

$10\times 6\times\frac{1}{2}=$ $\boxed{30\text{cm}^2}$ です。



（3）

入試必勝ポイント
①座標を文字で表す
②長さを座標の差で表す

（2）同様，等積変形を利用します。

2 点 A，B の座標はそれぞれ

$(t,\ \frac{1}{2}t+6)$，$(t,\ \frac{1}{4}t^2)$ と表せ，

$AB=\frac{1}{2}t+6-\frac{1}{4}t^2$ と表せます。

P’Q’＝10cm だから，

$$\triangle AP'Q' = 10\times(\frac{1}{2}t+6-\frac{1}{4}t^2)\times\frac{1}{2}$$
$$=-\frac{5}{4}t^2+\frac{5}{2}t+30$$

と表せます。

これが 25cm^2 になればよいので，

$$-\frac{5}{4}t^2+\frac{5}{2}t+30=25$$

という方程式が得られます。これを以下のように変形して解きます。

25 を移項して，$-\frac{5}{4}t^2+\frac{5}{2}t+5=0$

両辺を $-\frac{4}{5}$ 倍して，$t^2-2t-4=0$

解の公式等を用いて，$t=1\pm\sqrt{5}$

よって解は $t=1\pm\sqrt{5}$ の 2 つです。

$2<\sqrt{5}<3$ より $3<1+\sqrt{5}<4$，$-3<-\sqrt{5}<-2$ より $-2<1-\sqrt{5}<-1$ が言えるので，この 2 つの解はどちらも問いに合っています。

以上より，$\boxed{t=1\pm\sqrt{5}}$ です。