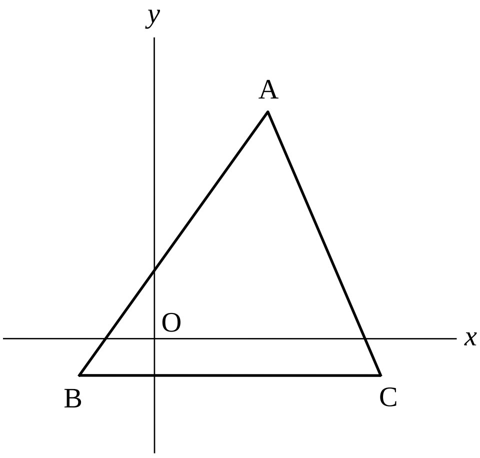
$\boxed{数学}$　類題にチャレンジ　〔関数　問題編〕

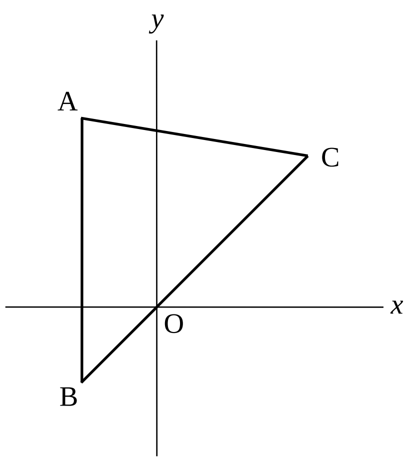
【類題 1】

次の各問に答えなさい。ただし，座標の単位を 1cm とします。

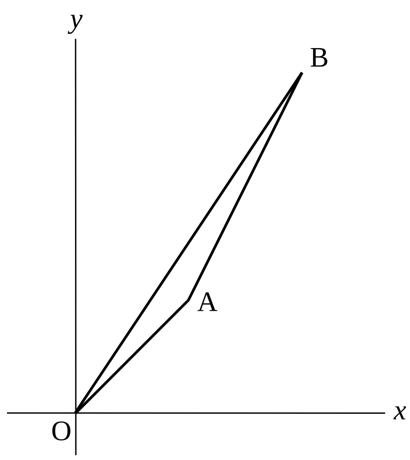
（1）3 点 A（3，6），B（－2，－1），C（6，－1）を頂点とする△ABC の面積を求めなさい。



（2）3 点 A（－2，5），B（－2，－2），C（4，4）を頂点とする△ABC の面積を求めなさい。

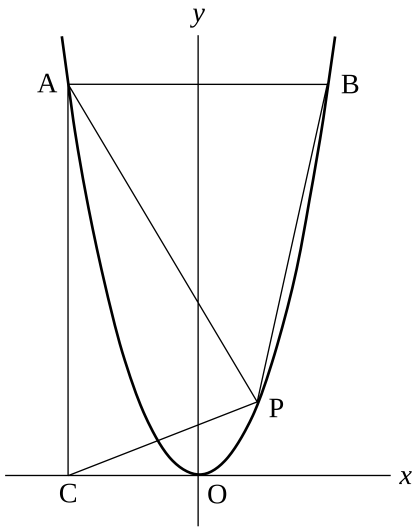


（3）3 点 O（0，0），A（2，2），B（4，6）を頂点とする△OAB の面積を求めなさい。



【類 題　2】

右の図で，曲線は関数 $y=x^2$ のグラフです。この曲線上に，x 座標が−3，3 である 2 点 A，B をとり，点 A から x 軸にひいた垂線と x 軸との交点を C とします。また，曲線上の $-3<x<3$ の範囲に，x 座標が t である点 P をとります。このとき，次の各問に答えなさい。ただし，座標の単位を 1cm とします。

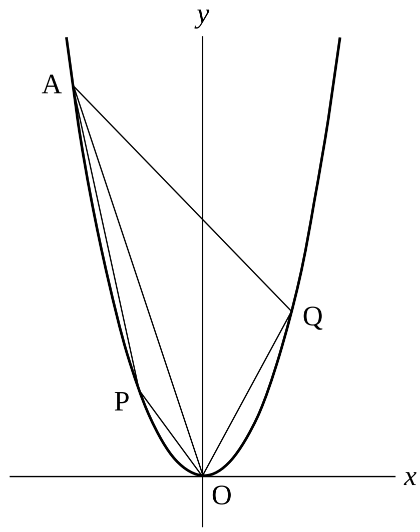


（1）△PAC の面積を，t を用いた文字式で表しなさい。

（2）△PAB の面積を，t を用いた文字式で表しなさい。

（3）△PAC の面積と△PAB の面積が等しくなるとき，t の値を求めなさい。

【類 題 3】

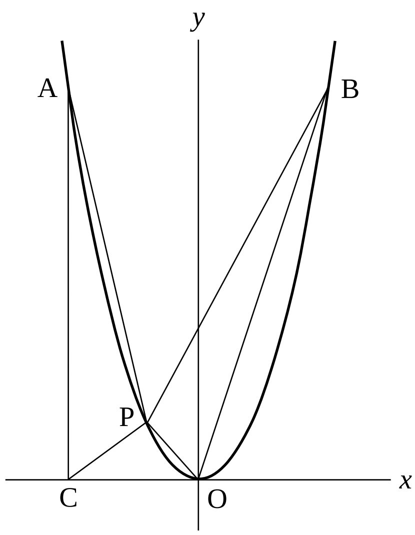


右の図で，曲線は関数 $y=x^2$ のグラフです。この曲線上に，x 座標が－3 である点 A をとります。このとき，次の各問に答えなさい。ただし，座標の単位を 1cm とします。

（1）曲線上の $-3<x<0$ の範囲に，x 座標が a である点 P をとります。△OAP の面積が 3cm^2 となるとき，a の値を求めなさい。

（2）曲線上の $x>0$ の範囲に，x 座標が b である点 Q をとります。△OAQ の面積が 9cm^2 となるとき，b の値を求めなさい。

【類 題 4】



右の図で，曲線は関数 $y=x^2$ のグラフです。この曲線上に，x 座標が－3，3 である 2 点 A，B をとり，点 A から x 軸にひいた垂線と x 軸との交点を C とします。また，曲線上の $-3<x<0$ の範囲に，x 座標が t である点 P をとります。△APC の面積と△OBP の面積が等しくなるとき，t の値を求めなさい。

数学　類題にチャレンジ　〔関数と面積　解答編〕

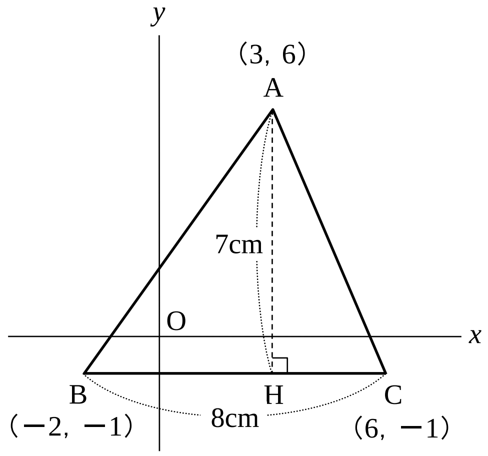
【類題 1】

入試必勝ポイント
①長さを座標の差で表す

入試必勝ポイント
③面積を図形の差で表す

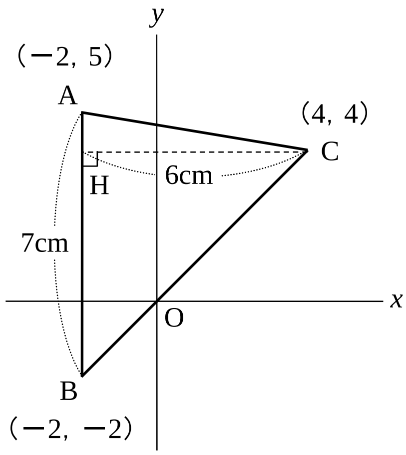
（1）x 軸に平行な辺 BC を底辺とすると，点 A から辺 BC に下ろした垂線 AH が高さとなります。
2 点 B，C の x 座標の差より，BC＝6−(−2)＝8cm です。また，2 点 A，H の y 座標の差より，AH＝6−(−1)＝7cm です。したがって，

$\triangle ABC = 8 \times 7 \times \frac{1}{2} = \boxed{28\text{cm}^2}$ です。



（2）y 軸に平行な辺 AB を底辺とすると，点 C から辺 AB に下ろした垂線 CH が高さとなります。
2 点 A，B の y 座標の差より，AB＝5−(−2)＝7cm です。また，2 点 C，H の x 座標の差より，CH＝4−(−2)＝6cm です。したがって，

$\triangle ABC = 7 \times 6 \times \frac{1}{2} = \boxed{21\text{cm}^2}$ です。

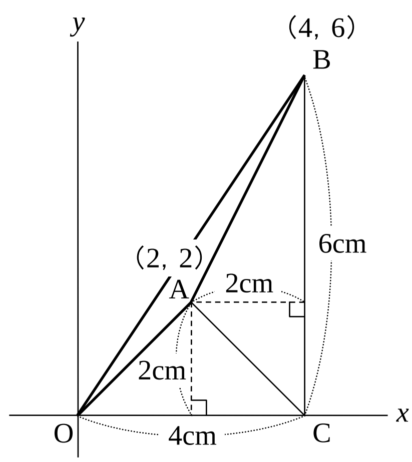


（3）点 B から x 軸に垂線 BC を下ろすと，
△OAB＝△OBC−(△OAC＋△ABC)と表せます。
それぞれの三角形の底辺と高さは右図のように求められるので，$\triangle OBC = 4 \times 6 \times \frac{1}{2} = 12\text{cm}^2$，

$\triangle OAC = 4 \times 2 \times \frac{1}{2} = 4\text{cm}^2$，

$\triangle ABC = 6 \times 2 \times \frac{1}{2} = 6\text{cm}^2$ です。したがって，

$\triangle OAB = 12 - (4 + 6) = \boxed{2\text{cm}^2}$ です。

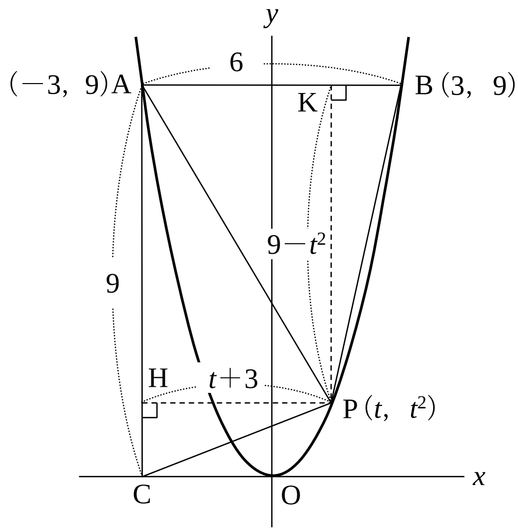


【類 題 2】

入試必勝ポイント ①長さを座標の差で表す

入試必勝ポイント ②座標を文字で表す

関数 $y=x^2$ において，$x=-3$ のとき $y=(-3)^2=9$，$x=3$ のとき $y=3^2=9$ です。よって，2 点 A，B の y 座標はどちらも 9 です。また，点 P の x 座標が t だから，y 座標は t^2 と表せます。



（1）y 軸に平行な辺 AC を底辺とすると，点 P から辺 AC に下ろした垂線 PH が高さになります。
点 A の y 座標より，AC＝9cm です。また，2 点 P，H の x 座標の差より，PH＝$t-(-3)=t+3$（cm） と表せます。よって，△PAC の面積は

$9\times(t+3)\times\frac{1}{2}=\boxed{\frac{9}{2}t+\frac{27}{2}\ (\mathrm{cm}^2)}$ です。

（2）x 軸に平行な辺 AB を底辺とすると，点 P から辺 AB に下ろした垂線 PK が高さになります。
2 点 A，B の x 座標の差より AB＝$3-(-3)=6$cm，2 点 P，K の y 座標の差より PK＝$9-t^2$(cm) と表せます。よって，△PAB の面積は $6\times(9-t^2)\times\frac{1}{2}=\boxed{27-3t^2\ (\mathrm{cm}^2)}$ です。

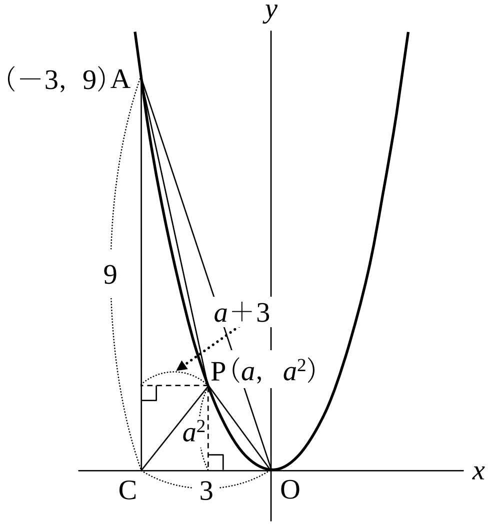
（3）△PAC＝△PAB より，$\frac{9}{2}t+\frac{27}{2}=27-3t^2$ という方程式がえられます。
両辺を整理して，　$2t^2+3t-9=0$
この方程式の解は $t=-3,\ \frac{3}{2}$ ですが，$-3<t<3$ より $\boxed{t=\frac{3}{2}}$ です。

【類 題　3】

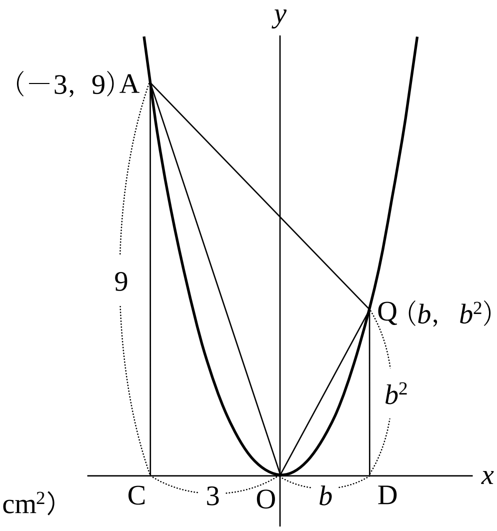
入試必勝ポイント
②座標を文字で表す

入試必勝ポイント
③面積を図形の差で表す

関数 $y=x^2$ において，$x=-3$ のとき $y=(-3)^2=9$ だから，点 A の y 座標は 9 です。
また，点 P の x 座標が a，点 Q の x 座標が b だから，y 座標はそれぞれ a^2，b^2 と表せます。



(1) 点 A から x 軸に垂線 AC を下ろすと，
△OAP＝△OAC－(△OPC＋△APC) と表せます。
△APC において，底辺を AC＝9cm とすると，高さは $a-(-3)=a+3$ (cm) と表せます。よって，
△APC $=9\times(a+3)\times\frac{1}{2}=\frac{9}{2}a+\frac{27}{2}$ (cm^2) です。
△OAC および△OPC について，底辺と高さは右図の通りです。よって，△OAC $=3\times9\times\frac{1}{2}=\frac{27}{2}\mathrm{cm}^2$，
△OPC $=3\times a^2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}a^2$ (cm^2) です。以上より，
△OAP の面積は
$\frac{27}{2}-(\frac{3}{2}a^2+\frac{9}{2}a+\frac{27}{2})=-\frac{3}{2}a^2-\frac{9}{2}a$ (cm^2)
と表せます。この面積が $3\mathrm{cm}^2$ だから，$-\frac{3}{2}a^2-\frac{9}{2}a=3$ という二次方程式がえられます。
両辺を整理して，$a^2+3a+2=0$　この解は $\boxed{a=-2,\ -1}$ です。$-3<a<0$ だから，どちらも問題に適しています。

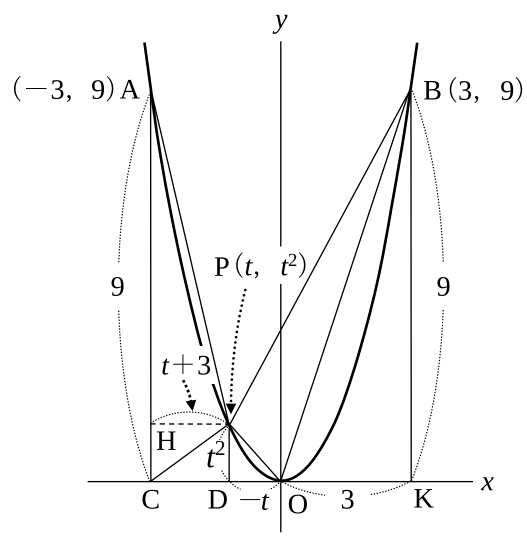


(2) 点 Q から x 軸に垂線 QD を下ろすと，
△OAQ＝台形 ACDQ－(△OAC＋△OQD) と表せます。
△OAC および△OQD について，底辺と高さは右図の通りです。よって，△OAC $=3\times9\times\frac{1}{2}=\frac{27}{2}\mathrm{cm}^2$，
△OQD $=b\times b^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}b^3$ (cm^2) です。また，
CD $=b+3$ と表せるので，台形 ACDQ の面積は
$(b^2+9)\times(b+3)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}b^3+\frac{3}{2}b^2+\frac{9}{2}b+\frac{27}{2}$ (cm^2)
です。以上より，
△OAQ $=\frac{1}{2}b^3+\frac{3}{2}b^2+\frac{9}{2}b+\frac{27}{2}-(\frac{27}{2}+\frac{1}{2}b^3)=\frac{3}{2}b^2+\frac{9}{2}b$ (cm^2)
と表せます。この面積が $9\mathrm{cm}^2$ だから，$\frac{3}{2}b^2+\frac{9}{2}b=9$ という二次方程式がえられます。
両辺を整理して，$b^2+3b-6=0$　この解は $b=\frac{-3\pm\sqrt{33}}{2}$ ですが，$b>0$ より $\boxed{b=\frac{-3+\sqrt{33}}{2}}$ です。

【類 題 4】

入試必勝ポイント ①長さを座標の差で表す	入試必勝ポイント ②座標を文字で表す	入試必勝ポイント ③面積を図形の差で表す

関数 $y=x^2$ において，$x=-3$ のとき $y=(-3)^2=9$，$x=3$ のとき $y=3^2=9$ です。よって，2 点 A，B の y 座標はどちらも 9 です。また，点 P の x 座標が t だから，y 座標は t^2 と表せます。



△APC において，y 軸に平行な辺 AC を底辺とすると，点 P から辺 AC に下ろした垂線 PH が高さになります。点 A の y 座標より，AC＝9cm です。また，2 点 P，H の x 座標の差より，PH$=t-(-3)=t+3$(cm) です。

よって，△PAC$=9\times(t+3)\times\frac{1}{2}=\frac{9}{2}t+\frac{27}{2}$ (cm^2) と表せます。

2 点 P, B から x 軸に垂線 PD, BK を下ろすと，△OBP＝台形 PDKB－(△OPD＋△OBK) と表せます。

△OPD において，OD$=0-t=-t$，PD$=t^2$ です。よって，△OPD$=-t\times t^2\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}t^3$ (cm^2) です。

△OBK において，OK＝3，BK＝9 です。よって，△OBK$=3\times9\times\frac{1}{2}=\frac{27}{2}$(cm^2) です。

台形 PDKB において，DK$=-t+3$ です。よって，台形 PDKB の面積は

$(t^2+9)\times(-t+3)\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t^2-\frac{9}{2}t+\frac{27}{2}$ (cm^2) です。以上より，

△OBP$=-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t^2-\frac{9}{2}t+\frac{27}{2}-(-\frac{1}{2}t^3+\frac{27}{2})=\frac{3}{2}t^2-\frac{9}{2}t$ (cm^2) と表せます。

△PAC$=\frac{9}{2}t+\frac{27}{2}$ (cm^2)，△OBP$=\frac{3}{2}t^2-\frac{9}{2}t$ (cm^2) が等しいので，$\frac{9}{2}t+\frac{27}{2}=\frac{3}{2}t^2-\frac{9}{2}t$ という方程式がえられます。

両辺を整理して，$t^2-6t-9=0$　この解は $t=3\pm3\sqrt{2}$ ですが，$-3<t<0$ より $\boxed{t=3-3\sqrt{2}}$ です。